

Jürgen Roth

## **Bewegliches Denken im Mathematikunterricht**

*Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades, vorgelegt bei der Fakultät für Mathematik und Informatik der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg.*

*Gutachter: Prof. Dr. Hans-Georg Weigand  
Prof. Dr. Rudolf vom Hofe*

*Datum der Disputation: 02. November 2005*

Beim Lösen mathematischer Probleme ist es oft hilfreich, eine gegebene Situation in Gedanken zu verändern. So kann man z. B. in eine geometrische Figur eine Bewegung hineindenken oder in einer Relation die gegebenen Größen gedanklich variieren. Man versucht dabei, die Auswirkungen der Veränderung zu antizipieren und damit zu argumentieren. In dieser Arbeit geht es um dieses „Bewegliche Denken“ als einem Teil des mathematischen Denkens.

Betrachtet man die geschichtliche Entwicklung des Umgangs mit Bewegungen und Veränderungen in der Mathematik und ihrer Didaktik und berücksichtigt man die (Visualisierungs-)Möglichkeiten, die der Computereinsatz mit entsprechender Software bietet, so fällt die Vielfalt der Ansätze auf. Bei diesen Ansätzen wird (oft implizit) eine Fülle von Fähigkeiten genannt oder gefordert. Dabei gibt es Überschneidungen, aber es werden auch bereichsspezifische Fähigkeiten angeführt. Was bisher fehlt, ist der Versuch einer themenunabhängigen Zusammenstellung der Kernfähigkeiten, die für eine gedankliche Auseinandersetzung mit Bewegungen bzw. Veränderungen grundsätzlich notwendig sind. Aus der Auseinandersetzung mit der Literatur, eigenen Unterrichtserfahrungen und im Hinblick auf das Arbeiten mit dynamischer Geometriesoftware haben sich für mich folgende drei Kernfähigkeiten herauskristallisiert, die ich unter dem Begriff „Bewegliches Denken“ zusammenfasse:

- In eine Konfiguration Bewegung hineinsehen und damit argumentieren,
- die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren,
- das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.

Im ersten Kapitel der Arbeit wird der Begriff „Bewegliches Denken“ eingegrenzt und die Beziehung zu ähnlichen Begriffen aus der Literatur untersucht.

Das zweite Kapitel dient der didaktischen Analyse der Rolle, die die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens für den Mathematikunterricht einnehmen. Es zeigt anhand von Beispielen die Möglichkeiten auf, die eine Herangehensweise an typische Fragestellungen des Mathematikunterrichts im Sinne des Beweglichen Denkens eröffnen kann. Dabei werden die Bereiche Begriffsbildung und Problemlösen als Kernbereiche des Mathematikunterrichts beleuchtet. Außerdem wird untersucht, welchen Beitrag das Bewegliche Denken zum Verstehen im Mathematikunterricht (MU) leisten kann und am Beispiel dynamischer Geometriesoftware wird aufgezeigt, wie der Computereinsatz zur Entwicklung des Beweglichen Denkens beitragen und in welcher Weise der Rechner dabei eingesetzt werden kann.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie lässt sich Bewegliches Denken im MU anregen und fördern?
- Ermöglicht die Förderung Beweglichen Denkens in einem Gebiet den Transfer auf ein anderes Gebiet?
- Wie lassen sich Lehrerinnen und Lehrer dafür gewinnen, ein didaktisches Konzept zur Förderung Beweglichen Denkens in ihrem Unterricht zu übernehmen?

Das dritte Kapitel widmet sich der Darstellung der Versuchsplanung der empirischen Untersuchung. Aufbauend auf die didaktische Analyse im zweiten Kapitel und auf Voruntersuchungen im Schuljahr 2001/02 wurde ein Unterrichtskonzept für den gesamten Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe an Gymnasien erstellt, das darauf ausgelegt ist, das Bewegliche Denken durchgängig zu entwickeln und zu nutzen. Außerdem wurden eine Strategie zur Gewinnung und Betreuung der Lehrkräfte konzipiert und ein an die hier zu untersuchende Fragestellung angepasster Leistungstest entwickelt.

Neben der Entwicklungsarbeit werden auch die Methoden der Durchführung und Auswertung der Vor- und Nachtests sowie die Konzeption der Durchführung und Auswertung der Interviews dargestellt, die zum Abschluss des Unterrichtsversuchs mit den beteiligten Lehrkräften geführt wurden.

Das vierte Kapitel widmet sich der Durchführung und Auswertung der empirischen Untersuchung. Im Schuljahr 2002/03 waren acht siebte Klassen aus vier bayerischen Gymnasien am Unterrichtsversuch beteiligt, von denen drei Klassen als Kontrollgruppe fungierten. Die Unterrichtsklassen wurden während des gesamten Schuljahres in Geometrie nach dem Konzept dieser Arbeit unterrichtet. Es hat sich gezeigt, dass es durchaus möglich ist, mit diesem Konzept Bewegliches Denken langfristig zu entwickeln und zu fördern. Diese Förderung scheint hauptsächlich Schülern des mittleren Leistungsdrittels zugute zu kommen. Sie schneiden im Nachtest signifikant besser ab als die entsprechende Gruppe der Kontrollklassen und werden durch den Unterricht auf das Leistungsniveau des oberen Leistungsdrittels gebracht. Das untere Leistungsdrittel steigert seine Leistung ebenfalls stärker als die entsprechende Gruppe der Kontrollklassen. Obwohl die Schüler der Unterrichtsklassen nur in der Geometrie im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichtet wurden, lässt sich auch ein Transfer auf die Algebra feststellen. Die Schüler der Unterrichtsklassen schneiden auch bei Items zur Algebra im Nachtest signifikant besser ab als die Schüler der Kontrollklassen.

Die Dissertation ist unter dem gleichen Titel beim Verlag Franzbecker, Hildesheim erschienen (ISBN 3-88120-416-4).

#### **Adresse des Autors**

Dr. Jürgen Roth  
Universität Würzburg  
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik  
Am Hubland  
97074 Würzburg  
E-Mail: [mail@juergen-roth.de](mailto:mail@juergen-roth.de)  
<http://www.juergen-roth.de>