

Jürgen Roth

Baggerarmsteuerung

Zusammenhänge rekonstruieren und Problemlösungen erarbeiten

Obwohl Bagger uns regelmäßig im Alltag begegnen, faszinieren sie immer noch viele Menschen. Sie werden zwar als Phänomen wahrgenommen, aber ihre genaue Funktionsweise bleibt oft völlig unklar. Die von Bolt (1995) gestellte Frage, „Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun?“ kann man wie folgt beantworten: Mit Mitteln der Mathematik lassen sich Zusammenhänge der Baggerarmsteuerung rekonstruieren und verstehen sowie Problemlösungen für neue Fragestellungen erarbeiten.

1 Projektstage Mathematik

Diese Gedankengänge waren die Motivation, den Bagger in das Zentrum der mathematischen Aktivitäten einer Projektgruppe der jährlich an der Universität Würzburg durchgeführten Schülerprojektstage Mathematik zu stellen. Jedes Jahr werden besonders an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe an die Universität eingeladen um sich in Kleingruppen unter der Betreuung von Hochschuldozenten jeweils vier Tage (und Nächte) lang mit einem Thema intensiv mathematisch auseinanderzusetzen (vgl. Roth 2008b, S. 121f). Dabei stellt es sich als gewinnbringend heraus, Medien zu vernetzen und dadurch Vorteile verschiedener Medien zu kombinieren sowie Nachteile zu minimieren. So können die Schülerinnen und Schüler auch komplexe Probleme meistern und zielgerichtet arbeiten. Es werden so unterschiedliche Medien wie gegenständliche Modelle, Computersimulationen, selbst entwickelte DGS-Modelle, Videoaufzeichnungen realer Baggerbewegungen sowie Papier und Bleistift genutzt und zueinander in Beziehung gesetzt. Dies erweist sich auch deshalb als gewinnbringend, weil die Medien dazu beitragen, die verschiedenen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu aktivieren und zu vernetzen.

In der genannten Projektgruppe bestehend aus vier Schülerinnen und vier Schülern der 11. und 12. Jahrgangsstufe wurden zunächst eine Video von einem Bagger in Aktion betrachtet (vgl. etwa WDR 2010) und anschließend ein Brainstorming zur Frage „Was interessiert euch am Bagger?“ durchgeführt. Dabei wurden so unterschiedliche Themen wie z. B. „Funktionsweise der Hydraulik“, „Gleichgewicht“, „Drehen auf der Stelle“, „Kräfte auf den Baggerarm“, „synchronisierte Bewegung von mehreren Steuerelementen“, „Bedienung“, „Baggerarmsteuerung“ und „Anzahl der Gelenke am Baggerarm“ genannt. Nach einer ersten Reflexion der Themen entschieden sich die acht Schülerinnen und Schüler dafür sich mit der Baggerarmsteuerung und der Frage auseinanderzusetzen, wie man eine senkrechte Bewegung der Baggerschaufel durch geeignetes Zusammenspiel zweier Hydraulikzylinder erreichen kann. Zur ersten Annäherung wurden zwei Untergruppen gebildet, die sich mit jeweils einer dieser Fragen auseinandersetzten.

2 Baggerarmsteuerung

2.1 Überblick verschaffen

Der Gruppe „Baggerarmsteuerung“ wurde bei ihrer Diskussion sehr schnell klar, dass alle Bagger aus dem Alltag kennen, aber noch niemand sich darüber Gedanken gemacht hat, wie die Bewegungen eines Baggerarms gesteuert werden. Aus diesem Grund wurde auf einer nahegelegenen Baustelle ein eigenes Video von einem Bagger in Aktion aufgenommen.

Dabei wurde darauf geachtet, dass die Funktionselemente am Baggerarm gut sichtbar sind und der Baggerführer gebeten, auch gezielt einzelne Bewegungen (z. B. nur die Bagger-schaufel) langsam durchzuführen. Dieses Video wurde anschließend in der Gruppe analysiert. Einzelne Beobachtungen wurden an wirklichkeitsgetreuen Funktionsmodellen von Baggern noch einmal genauer untersucht.



Abbildung 1: Funktionsmodell 1

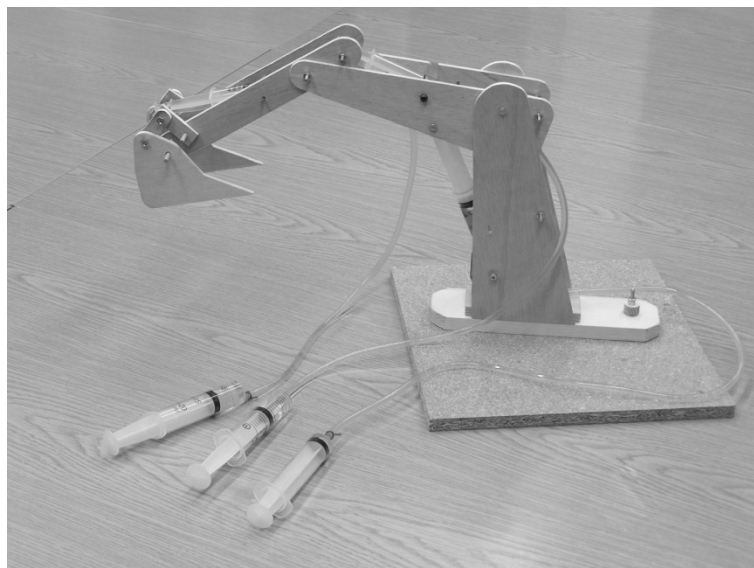


Abbildung 1a: Funktionsmodell 2 (vgl. Herold 2009)

Auf diese Weise haben die Schülerinnen und Schüler direkt aus der Anschauung erschlossen, dass die Bewegung über spezielle Gelenkdreiecke, sogenannte Krandreiecke, gesteuert wird, bei denen zwei Seiten starr sind und eine Seite (der Kolben) in der Länge veränderlich ist.



Abbildung 2: Baggerarmsteuerung

Hält man eine starre Seite des Krandreiecks fest und variiert die Länge des Kolbens, dann resultiert daraus eine Bewegung des dritten Eckpunkts des Dreiecks. Die Frage, auf welcher Kurve sich dieser Eckpunkt bewegt, lässt sich nur dann beantworten, wenn es gelingt, die Fokussierung vom Kolben, der die Bewegung initiiert und nur linear in der Länge variiert wird, zu lösen. Man muss im Sinne des Beweglichen Denkens (Roth 2008a, S. 3ff) die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren. Erst dann kann deutlich werden, dass die nicht festgehaltene starre Seite des Krandreiecks sich nur um den fixierten Endpunkt drehen kann. Dies impliziert, dass der andere Endpunkt dieser Strecke sich auf einer Kreisbahn bewegen muss (vgl. Abbildung 3).

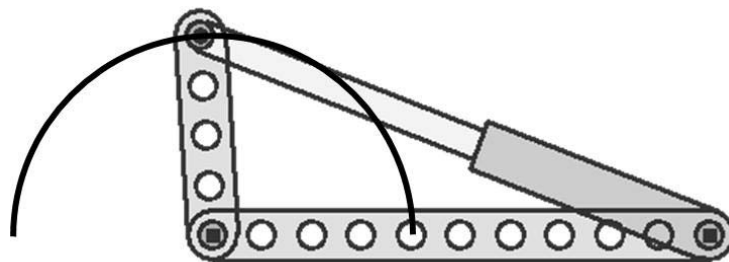


Abbildung 3: Krandreieck

2.2 Bewegungskurven der Schaufelspitze

Über ein Krandreieck lassen sich ausschließlich Kreisbewegungen erzeugen. Koppelt man dagegen mehrere solche Dreiecke, wie am Baggerarm, so lassen sich auch komplexe Bewegungen steuern. Abbildung 4 zeigt einzelne Ortslinien der Baggerschaufelspitze bei zusammengesetzten Bewegungen. Aus ihnen haben die Schülerinnen und Schüler sich die gesamte Reichweite der Baggerschaufel erschlossen.

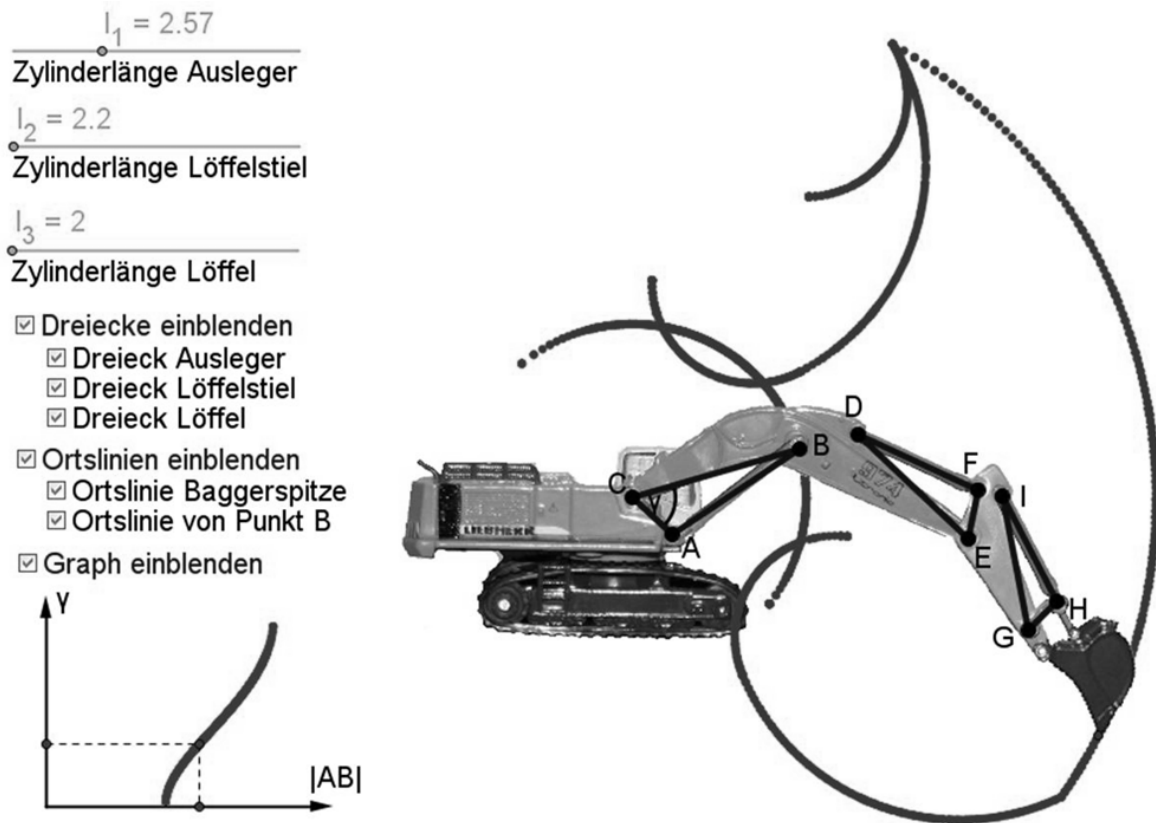


Abbildung 4: Bewegungskurven der Baggerschaufelspitze und Zusammenhang zwischen der Länge eines Kolbens und dem im Krandreieck gegenüberliegenden Innenwinkel

2.4 Funktion und Art des Gelenkvierecks an der Baggerschaufel

Bei genauerer Analyse des Videos bzw. der Funktionsmodelle wird deutlich, dass neben den bereits entdeckten Krandreiecken noch ein weiterer Gelenkmechanismus an der Baggerarmbewegung beteiligt ist. Zur Steuerung der Bewegung der Baggerschaufel gibt es zusätzlich zu einem Krandreieck auch noch ein Gelenkviereck (vgl. die Abbildungen 1, 1a, 2, 4 und 5).



Abbildung 5: Gelenkviereck an der Baggerschaufel

Erkundung der Funktion des Gelenkvierecks

Um die Funktion dieses Gelenkvierecks zu erkunden haben die Schülerinnen und Schüler zunächst einen Bagger gefilmt, der nur die Schaufel bewegt, diese Bewegung mehrfach beobachtet und mit dem Funktionsmodell des Baggers nachgestellt. Das Ergebnis ihrer Untersuchungen war die Hypothese, dass das Gelenkviereck den möglichen Drehwinkel der Baggerschaufel vergrößern soll. Aus der Analyse des Videos ergab sich, dass beim gefilmten Bagger das Krandreieck an der Baggerschaufel einer Drehbewegung um mehr als einen Viertelkreis hervorruft, während die Baggerschaufelspitze wegen des zusätzlichen Gelenkvierecks gleichzeitig mehr als einen Halbkreisbogen durchläuft (vgl. Abbildung 6).



Abbildung 6: Drehbewegungen an der Baggerschaufel

Mit Hilfe eines Gelenkviereckmodells aus zusammenschraubten Lochblechen (vgl. Abbildung 5) und mit einer DGS-Simulation eines Gelenkvierecks und im Kontrast dazu eines Krandreiecks haben die Schülerinnen und Schüler dieses Phänomen noch weitergehend erforscht und dabei festgestellt, dass bei einem mechanischen Krandreieck (wie es beim Bagger vorkommt) die Größe des dem Kolben gegenüberliegenden Innenwinkels nur zwischen deutlich mehr als 0° und deutlich weniger als 180° variiert werden kann. Für die Extremfälle 0° und 180° müssten nämlich jeweils einzelne Teile des Gestänges direkt übereinander liegen, was technisch prinzipiell nicht möglich ist. Mit Hilfe einer DGS-Simulation lassen sich dagegen auch die mathematischen Grenzfälle ausloten und die Drehung um volle 180° realisieren.

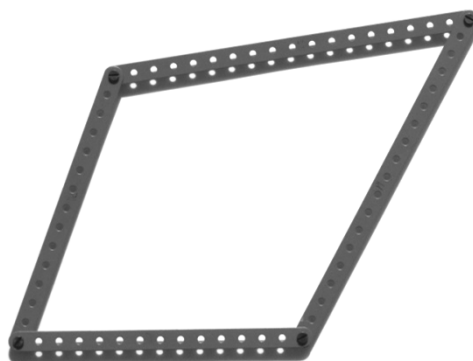


Abbildung 7: Gelenkviereck aus Lochstreifen

Mit einer DGS-Simulation lässt sich auch erarbeiten, dass mit einem idealen (mathematischen) Gelenkviereck bei geeigneter Dimensionierung der „Lochstangen“ eine Drehung um 180° in eine Drehung um 360° umgesetzt werden kann (vgl. Abbildung 8).

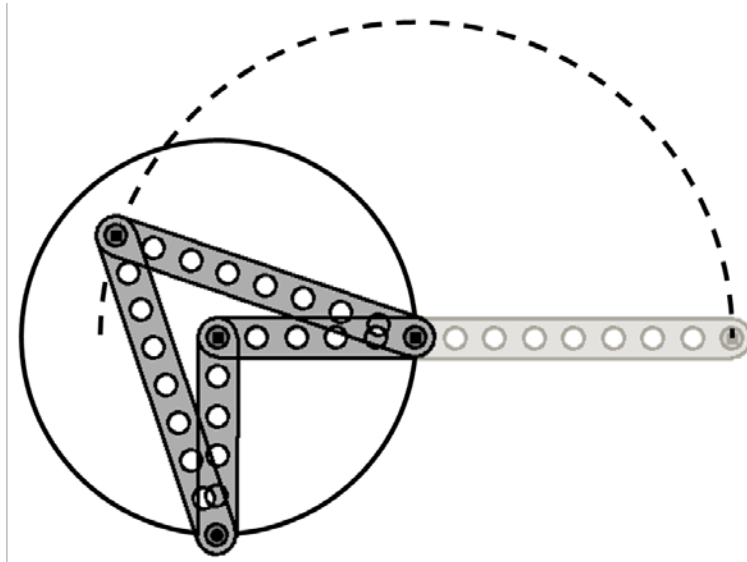


Abbildung 8: „Ideales“ Gelenkviereck

Durch Vergleich mit dem Baggervideo, dem Funktionsmodell, entsprechenden Experimenten am Lochstreifenmodell und der DGS-Simulation haben die Schülerinnen und Schüler schließlich erarbeitet, dass das Gelenkviereck zu diesem Zweck wohl die Form eines symmetrischen Drachenvierecks besitzen muss. (DGS-Modelle für ein Krandreieck und ein Gelenkviereck findet man im Internet unter den Adressen <http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html> und <http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/krandreieck.html>.) Dies galt es zur Sicherung dieser Vermutung noch zu beweisen. Auch hier zeigte sich wieder wie wichtig das Zusammenspiel ganz verschiedener Medien für den Erkenntnisgewinn war.

Beweis: Das Gelenkviereck ist ein symmetrischer Drachen

Zum Beweis wurde nach Zwangsbedingungen für das gesuchte Phänomen gesucht. Sie wurden erst gefunden, als die Schülerinnen und Schüler anhand der DGS-Simulation die Grenzfälle, in denen das Gelenkviereck zur Strecke entartet genauer in den Blick nahmen. (Diese Grenzfälle können, wie oben bereits reflektiert, mit mechanischen Gelenkvierecken gar nicht erreicht werden.) Es geht nämlich darum, ein Gelenkviereck zu finden, bei dem eine Drehung einer Seite um 180° zu einer Drehung einer anderen Seite um 360° führt. Im Folgenden wird ein Gelenkviereck ABCD betrachtet, bei dem die Seite [AB] fixiert ist, die Seite [BC] um den Punkt B um 180° gedreht wird und dabei der Winkel bei A (wir nennen ihn α) zwischen 0° und 360° variiert wird. Dabei dreht sich natürlich die Seite [AD] um den Punkt A um 360° . Wir beginnen mit dem ersten Extremfall, bei dem $\alpha = 0^\circ$ ist (vgl. Abbildung 9).

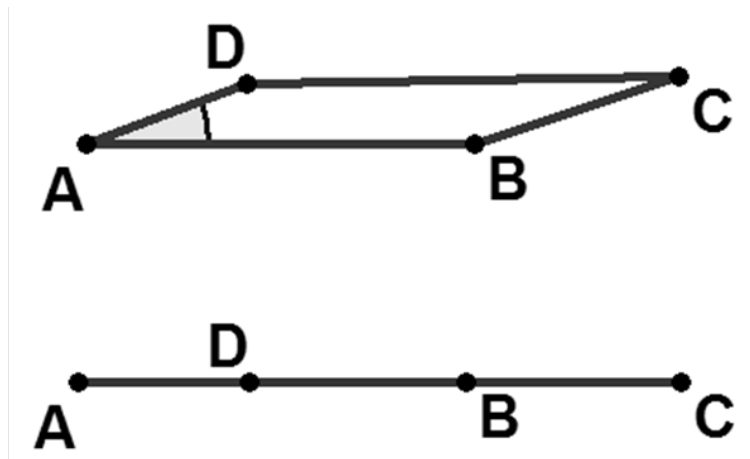


Abbildung 9: Gelenkviereck ABCD mit $\alpha = 0^\circ$

In diesem Fall liegen alle Eckpunkte des Gelenkvierecks auf der Geraden AB. Daraus ergibt sich eine Zwangsbedingung für die Lage der Punkte D und B. Diese beiden Punkte liegen jeweils zwischen den Punkten A und C, es gilt also A-B-C und A-D-C. Folglich gilt für die Streckenlängen der beteiligten Strecken:

$$(I) \quad |AB| + |BC| = |CD| + |DA|$$

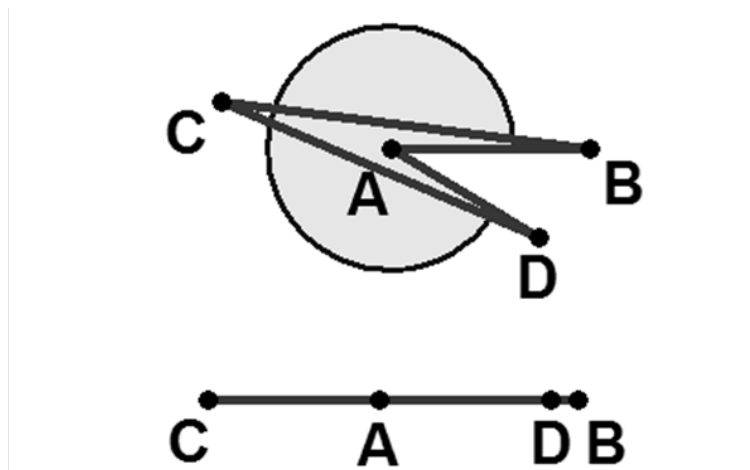


Abbildung 10: Gelenkviereck ABCD mit $\alpha = 360^\circ$

Auch im Fall der zweiten Extremlage mit $\alpha = 360^\circ$ sind alle vier Eckpunkte kollinear und liegen auf der Geraden AB. Wie oben ergeben sich auch hier Zwangsbedingungen für die Lagebeziehungen der Eckpunkte. Der Punkt A liegt einerseits zwischen C und D, es gilt also C-A-D und andererseits zwischen C und B, d. h. C-A-B. Daraus folgen aber sofort Bedingungen für die beteiligten Streckenlängen, nämlich:

$$(II) \quad |CD| = |CA| + |AD|$$

$$(III) \quad |CB| = |CA| + |AB|$$

Wie geht es weiter? Betrachtet man die drei gefundenen Gleichungen (I) bis (III) und berücksichtigt man, dass Aussagen über Längenbeziehungen zwischen Seiten des Gelenkvierecks angestrebt werden, so fällt zunächst auf, dass die Strecke [CA] keine Seite sondern eine Diagonale des Vierecks ist. Es liegt also nahe, die entsprechende Seitenlänge aus den Gleichungen zu eliminieren. Dies gelingt z. B. indem man die Gleichung (III) von der Gleichung (II) subtrahiert. Damit folgt:

$$(IV) \quad |CD| + |AB| = |AD| + |CB|$$

Die beiden Gleichungen (I) und (IV) stellen jeweils Beziehungen zwischen allen vier Seitenlängen des Gelenkvierecks dar. Benötigt werden aber Aussagen zu Beziehungen zwischen genau zwei Seitenlängen. Folglich kann der nächste Versuch sein, weitere Seitenlängen zu eliminieren. Dies gelingt z. B. dadurch, dass man die Gleichung (I) von der Gleichung (IV) subtrahiert. Daraus ergibt sich:

$$(V) \quad |CD| - |BC| = |CB| - |CD|$$

Mit $|BC| = |CB|$ folgt:

$$2 \cdot |CD| = 2 \cdot |BC| \Rightarrow |CD| = |BC| \quad (*)$$

Setzt man (*) in (I) ein, so ergibt sich:

$$|AB| = |DA| \quad (**)$$

Die Gleichungen (*) und (**) besagen, dass die an den Punkten A bzw. C anliegenden Seiten jeweils gleich lang sind. Dies bedeutet aber, dass das Viereck ABCD ein symmetrischer Drachen ist.

Ist die gefundene Bedingung nur notwendig oder auch hinreichend?

Die Schülerinnen und Schüler waren sehr stolz darauf, dass sie hier eine notwendige Bedingung für das Gelenkviereck an der Baggerschaufel gefunden hatten. Ist diese Bedingung aber auch hinreichend? Diese Frage lässt sich wieder durch die Auswahl eines geeigneten Mediums beantworten. Fixiert man nämlich beim „Lochstreifengelenkviereck“ aus Abbildung 7 nicht eine der kurzen, sondern eine der langen Seiten, und wiederholt die vorher durchgeführte Drehbewegung eines Eckpunkts um 180° , dann stellt man fest, dass sich so keine Drehung um 360° einer anderen Seite erreichen lässt. Die entsprechende Seite lässt sich dadurch nicht einmal um 90° drehen. Auf diese Weise haben die Schülerinnen und Schüler erkannt, dass sie zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung gefunden haben.

3 Senkrechte Bewegung

Parallel zur Gruppe „Baggerarmsteuerung“, deren Erarbeitungsschritte und Ergebnisse bisher geschildert wurden, setzte sich eine andere Teilgruppe der Projektgruppe „Bagger“ mit der Frage auseinander ob, und ggf. wie eine senkrechte Bewegung der Baggerschaufel durch geeignetes Zusammenspiel zweier Hydraulikzylinder erreicht werden kann. Diese Frage hat im Alltag eines Baggerführers eine große Relevanz, wenn es darum geht, eine Last in ein Baggerloch abzulassen oder aus dem Loch herauszuheben, ohne dabei den einweisenden Kollegen im Baggerloch zu gefährden.

3.1 Senkrechte Bewegung – mit dem Bagger durchführbar?

Zunächst untersuchten die Schülerinnen und Schüler, ob eine senkrechte Bewegung ohne waagerechte Bewegungsanteile überhaupt möglich ist. Dazu erstellten sie eine DGS-Simulation, bei der eine Parallele zur y-Achse vorgegeben wurde, auf der ein Punkt A bewegt werden konnte. Ausgehend von diesem Punkt A wurden zwei Krandreiecke konstruiert und die den „Kolben“ gegenüberliegenden Innenwinkelgrößen gemessen. Anhand dieser Simulation schlossen die Schülerinnen und Schüler, dass eine senkrechte Bewegung durch geeignete synchrone Steuerung zweier Kolben prinzipiell möglich ist.

Anschließend wurde das Programm für das weitere Vorgehen festgelegt. Man einigte sich darauf folgende Teilprobleme zu bearbeiten:

- Die Änderung der Winkelgrößen in Abhängigkeit von der Änderung der Lage des Punktes auf der Parallele zur y-Achse sollte graphisch dargestellt und daraus auf einen funktionalen Zusammenhang zwischen den „interessierenden Größen“ geschlossen werden.

- Die Frage welche Größen (insbesondere welche Winkel) in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen sollte geklärt werden.

3.2 Zugang über experimentelle Graphen und Anpassungskurven

Die Schülerinnen und Schüler versuchten auch, sich der Frage der Steuerung der senkrechten Bewegung dadurch anzunähern, dass sie in einem Koordinatensystem jeweils die Längen der Kolben der beteiligten Krandreiecke über der y-Koordinate des oben erwähnten Punktes A auftrugen. Um daraus einen Funktionalen Zusammenhang zu erschließen, wurde nach geeigneten Anpassungskurven gesucht. Ein Zwischenergebnis dieses Vorgehens wird in Abbildung 11 dargestellt. Die empirischen Kurven wurden durch eine Gerade bzw. durch eine nach oben geöffnete Parabel angepasst. Anschaulich bedeutet dies, dass der Baggerführer bei einer senkrechten Bewegung die Länge eines der beiden Kolben zunächst verringern und anschließend vergrößern muss, während er den anderen Kolben gleichmäßig vergrößert. Dieser Zugang wurde allerdings nach diesem Teilergebnis von den Schülerinnen und Schülern als nicht praktikabel verworfen.

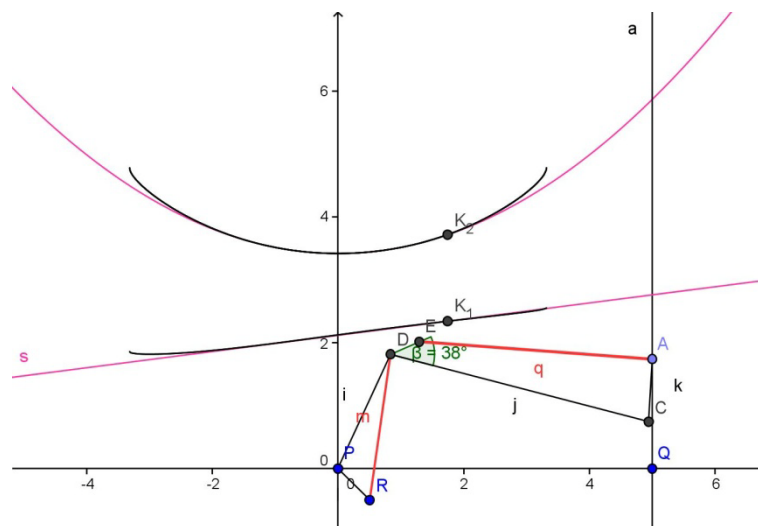


Abbildung 11: Experimentelle Graphen und Anpassungskurven

3.3 Zusammenhang zwischen Kolbenlänge und gegenüberliegendem Innenwinkel im Krandreieck

Bei der Untersuchung der Frage, welche Größen bei der Bewegung eine Rolle spielen wurde den Schülerinnen und Schülern folgendes sehr schnell deutlich: In einem Krandreieck wird eine Seite immer festgehalten. Die Bewegung des dritten Eckpunkts des Krandreiecks wird technisch offensichtlich über die Längenänderung des Kolbens, also einer Seite festgelegt. Aus der Perspektive der Mathematik ist für diese Kreisbewegung aber der Innenwinkel zwischen den beiden Seiten fester Länge verantwortlich. Für das weitere Vorgehen war es folglich wichtig zu klären, welcher Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen besteht. Dazu kann es sinnvoll sein, eine Simulation auf der Basis eines dynamischen Geometriessystems wie etwa GeoGebra zu erstellen (vgl. Abbildung 4) und die darin gemessenen Größen „Kolbenlänge“ $|AB|$ und „Winkelgröße“ des gegenüberliegenden Innenwinkels des Krandreiecks gegeneinander aufzutragen. Tut man dies in dem Bereich, der auch beim realen Bagger bzw. dem gegenständlichen Funktionsmodell technisch möglich ist, so erscheint die entstehende Kurve fast linear. Erst wenn man die Möglichkeiten einer solchen Simulation

ausnutzt und bis zu Extremlagen variiert, die technisch gar nicht mehr möglich sind, erkennt man einen Graphen wie in Abbildung 4. Dieser macht deutlich, dass sicher kein linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Größen besteht und regt zum neuen Reflektieren an. Die Schülerinnen und Schüler kamen so auf die Idee die Beziehung zwischen einem Innenwinkel im Dreieck und der gegenüberliegenden Seitenlänge zu nutzen, wie sie sich aus dem Kosinussatz ($c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma$) ergibt. Mit seiner Hilfe lässt sich der Verlauf des Graphen nicht nur nachvollziehen, sondern sogar quantitativ beschreiben:

$$\llbracket a - b \rrbracket; a + b \rrbracket \rightarrow [0; \pi]; c \mapsto \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

3.5 Analytische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Koordinaten des Punktes der Baggerschaufel und den Kolbenlängen

Aufbauend auf den erarbeiteten Zusammenhang zwischen der Kolbenlänge und dem gegenüberliegenden Innenwinkel im Krandreieck, versuchten die Schülerinnen und Schüler schließlich eine analytische Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Koordinaten des Punktes der Baggerschaufel und den Kolbenlängen der an der Steuerung der senkrechten Bewegung beteiligten Krandreiecke zu erarbeiten. Auf dem Weg dahin gab es eine ganze Reihe von Ansätzen. Die beiden Abbildungen zeigen jeweils eine Papier- und eine Tafelskizze mit von den Schülerinnen und Schülern für wesentlich erachteten Variablen, die beim Lösungsprozess entstanden.

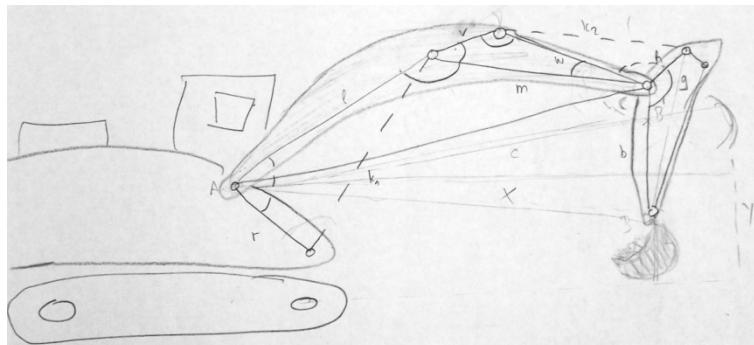


Abbildung 12: Papierskizze

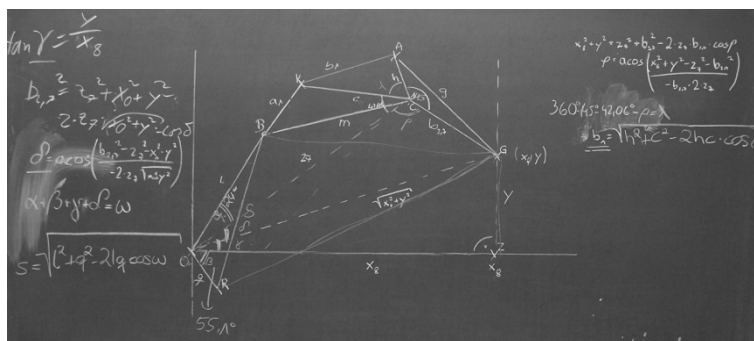


Abbildung 13: Tafelskizze

Im Folgenden soll eine von den Schülerinnen und Schülern erarbeitete „Lösung“ des Problems dargestellt werden. Sie bezieht sich auf die in Abbildung 13 abgedruckte Tafelskizze, die aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abbildung 14 noch einmal dargestellt ist.

$$\zeta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{v^2 + w^2 - b^2}{2vw}\right) = \arccos\left(\frac{v^2 + x^2 + y^2 - b^2}{2v\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Damit ergibt sich für die Winkelgröße des Winkels $\angle ROB$:

$$\angle ROB = \beta + \zeta + \delta + \alpha$$

Um die Kolbenlänge „Kolben₁“ zu bestimmen, wird erneut der Kosinussatz angewandt:

$$Kolben_1 = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr \cos(\angle ROB)}$$

Einsetzen liefert:

$$Kolben_1 = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr \cdot \cos\left(\alpha + \beta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arccos\left(\frac{v^2 + x^2 + y^2 - b^2}{2v\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)}$$

Es ist den Schülerinnen und Schülern also gelungen, einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Punktes G der Baggerschaufelaufhängung und den Längen der beiden Kolben, die die Bewegung von G steuern zu erarbeiten. Damit ist es bei fester x-Koordinate von G (hier mit x bezeichnet) möglich für jede y-Koordinate von G in einem ganzen Bereich die zugehörigen Kolbenlängen der beiden an der Bewegungssteuerung beteiligten Krandreiecke zu bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler haben abschließend für ein festes x die Graphen der Funktionen $Kolben_1(y)$ und $Kolben_2(y)$ mit den entsprechenden, experimentell mit einer DGS-Simulation gewonnenen Kurven verglichen und waren mit der Übereinstimmung sehr zufrieden.

4 Vernetzung von Medien kann Modellierungen erleichtern

Es ist in den letzten Abschnitten an verschiedenen Stellen deutlich geworden, wie der Einsatz der verschiedenen Medien den Modellierungsprozess entscheidend beeinflusst hat. Bei dem hier vorgestellten Projekt hat es sich als gewinnbringend herausgestellt, Medien zu vernetzen und dadurch Vorteile verschiedener Medien zu kombinieren sowie Nachteile zu minimieren. So konnten die Schülerinnen und Schüler auch komplexe Probleme meistern und zielgerichtet arbeiten. Es wurden so unterschiedliche Medien wie gegenständliche (Funktions-)Modelle, Computersimulationen, selbst entwickelte DGS-Modelle, Videoaufzeichnungen realer Baggerbewegungen sowie Papier und Bleistift genutzt und zueinander in Beziehung gesetzt (vgl. Abbildung 15). Dies erwies sich auch deshalb als gewinnbringend, weil die Medien dazu beitragen, die verschiedenen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu aktivieren und zu vernetzen.¹

4.1 Medien vernetzen

Vernetzung ist auch bei der Mediennutzung ein wesentlicher Aspekt. So kann ein geeigneter und individuell verantworteter Einsatz verschiedenster Medien eine entscheidende Komponente bei Problemlöse- und Modellierungsprozessen sein.

¹ „Für eine vertiefte Diskussion des häufig wenig reflektiert verwendeten Begriffs „Vernetzung“ sei auf Hischer (2009) verwiesen. Vernetzung spielt im (Mathematik-)Unterricht eine zentrale Rolle. Lehrkräfte sollten ihren Unterricht so gestalten, dass Beziehungen zwischen den Unterrichtsinhalten erfasst werden. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, wie man Wissensnetze aufbaut, sowie vorhandene Wissensnetze nutzt und weiterentwickelt.“ (Roth, 2009)

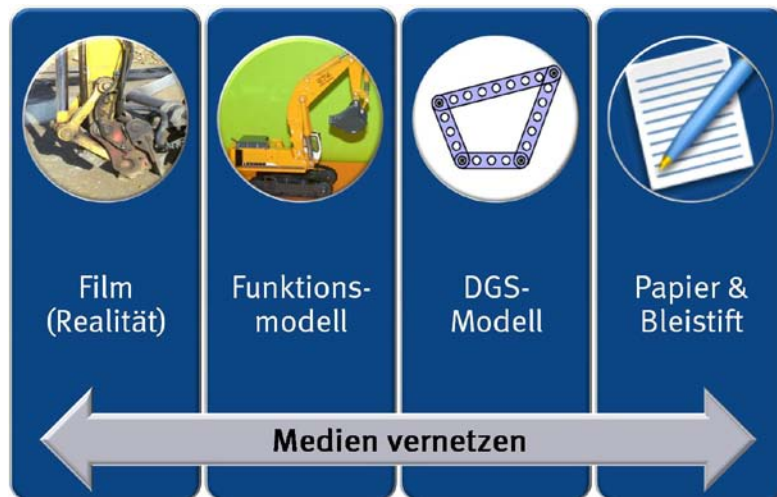


Abbildung 15: Medien vernetzen

Der Begriff Medium wird hier als Werkzeug zur Weltaneignung verstanden. Hierbei muss zwischen Universalwerkzeugen, wie etwa einem dynamischen Geometriesystem, das für sehr unterschiedliche Zwecke eingesetzt werden kann und Spezialwerkzeugen unterschieden werden, die nur für einen sehr spezifischen Zweck benutzt werden können, wie etwa ein Funktionsmodell eines Baggers. Mit Hilfe von Medien lassen sich, wie in den letzten Abschnitten des Artikels immer wieder deutlich wurde, Zusammenhänge entdecken oder vermuten und diese Zusammenhänge begründen bzw. widerlegen. Dazu ist aber eine Medienkompetenz zu entwickeln, die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen Medien selbstverantwortlich vernetzend zu nutzen. Was dies im Einzelnen bedeutet, lässt sich anhand der Werkzeugkastenmetapher verstehen: Es stehen viele verschiedene Medien zur Verfügung und der Nutzer hat die *Freiheit* beliebige davon zu nutzen. Diese Freiheit erfordert aber die Fähigkeit für einen bestimmten Zweck das jeweils geeignete Medium auszuwählen, also die Frage „*Welche Medien können mir jetzt helfen?*“ reflektiert beantworten zu können. Dazu gehört auch die Fähigkeit Situationen zu erfassen, die einen Medienwechsel notwendig machen („*Wozu kann dieses Medium beitragen und wo sind seine Grenzen?*“). Es wird deutlich, dass die Fähigkeit Medien vernetzend zu nutzen ein übergreifendes Lehr- und Lernziel des Mathematikunterrichts sein sollte. Dies umfasst auch die Fähigkeit mit Hilfe von Universalwerkzeugen, wie etwa dynamischen Geometriesystemen, Spezialwerkzeuge für eine konkrete Situation, etwa eine Simulation für einen speziellen Zweck entwickeln zu können. Den Schülerinnen und Schülern der Projektgruppe „Bagger“ ist dies gelungen.

4.2 Mediennutzung und „der“ Modellierungskreislauf

Im Rahmen der Projekttage haben die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Medien zu ganz unterschiedlichen Zwecken genutzt. Diese Nutzungsarten sollen im Folgenden überblicksartig zusammengestellt werden.

Film

Die verschiedenen von den Schülerinnen und Schülern teilweise selbst aufgezeichneten Filme realer Baggerbewegungen dienten dazu das Interesse zu wecken und zu erhalten, Phänomene zunächst überhaupt erst einmal wahrzunehmen und dann auch untereinander in Beziehung zu setzen. Schließlich wurden die Filme genutzt um Zusammenhänge zu vermuten, zu beobachten und ggf. herzustellen.

Funktionsmodelle

Es wurden zwei Funktions(spielzeug)modelle von Baggern, aber auch einfache Gelenkmechanismen aus Lochstangen verwendet um beobachtete Phänomene genauer zu untersuchen und miteinander in Beziehung zu setzen. Es ging aber auch darum Zusammenhänge zu vermuten, zu erforschen bzw. ggf. zu widerlegen.

DGS-Modelle

Die auf der Basis von dynamischen Geometriesystemen erstellten Konstruktionen dienten dazu Phänomene geometrisch zu modellieren und Variationsmöglichkeiten zu realisieren. Dadurch wurde eine gezielte Variation einzelner Größen möglich, die präziser ausgeführt werden konnten als an den realen Modellen. Die DGS-Modelle ermöglichen es auch, Grenzfälle anzusteuern und auszuloten, die mit gegenständlichen Funktionsmodellen prinzipiell gar nicht möglich sind. Gerade die Betrachtung von solchen Grenzfällen kann oft zu ganz neuen Erkenntnissen beitragen. Daneben können mit Hilfe von Ortslinien Bewegungen umgesetzt, dargestellt, festgehalten und erst dadurch sinnvoll reflektiert werden. Mit ihrer Hilfe können Abhängigkeiten experimentell als Funktionsgraphen ausgegeben und so der Analyse zugänglich gemacht werden. Auf diese Weise lassen sich vermutete Zusammenhänge aber auch testen.

Papier und Bleistift

Neben all den genannten Medien dürfen die klassischen Medien Papier und Bleistift (bzw. Tafel und Kreide) nicht vergessen werden. Im Zusammenspiel mit den anderen Medien lassen sich damit vermutete Zusammenhänge sichern, beweisen, ggf. widerlegen und so verstehen. Natürlich ermöglicht es eine Papier und Bleistiftumgebung auch, Zusammenhänge zu entdecken!

Die hier am Beispiel der Projektgruppe „Bagger“ dargestellten Nutzungsmöglichkeiten von Medien gelten natürlich über dieses konkrete Projekt hinaus ganz allgemein etwa für den Mathematikunterricht.

Während der Projekttag Mathematik wurden in der Projektgruppe „Bagger“ verschiedene Aspekte der Baggerarmsteuerung modelliert. Betrachtet man einmal etwas genauer, an welchen Stellen eines Modellierungskreislaufs die verschiedenen Modelle eingesetzt wurden, so stellt man fest, dass es kaum Medien gibt, die nur punktuell im Modellierungsprozess verwendet werden. Dasselbe Medium spielt vielmehr in der Regel an sehr unterschiedlichen Stellen im Modellierungskreislauf eine Rolle. Dies sollen auch die vielen Pfeile andeuten, die in Abbildung 16 von den verschiedenen Medientypen ausgehen und an verschiedensten Stellen des Modellierungskreislaufs enden. Sie stehen jeweils für einen konkreten Einsatz in der Projektgruppe. Dies macht auch wieder sehr deutlich, dass ein Modellierungskreislauf nur ein Gerüst darstellt, das es erleichtert, die verschiedensten Aspekte einer Modellierung im Blick zu behalten. Auf keinen Fall darf er als fester, bei jeder Modellierung so zu durchlaufender Regelkreis aufgefasst werden. Die Art der Mediennutzung legt vielmehr nahe, dass die verschiedenen Aspekte der Modellierung im konkreten Problemlöseprozess in vielfältiger Weise kreativ ineinandergreifen und sicher nicht normativ gefasst werden können. Eine reflektiert und vernetzt genutzte Vielfalt von Medien kann diesen Prozess aber konstruktiv unterstützen.

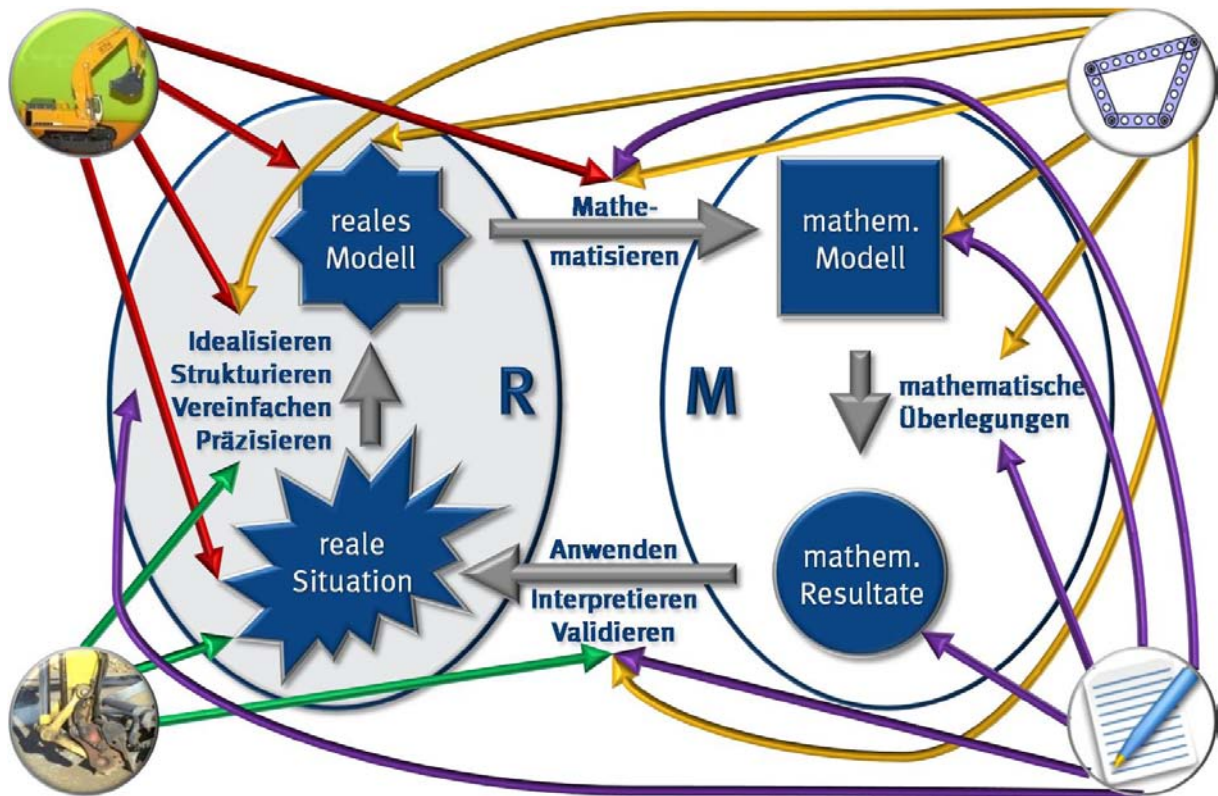


Abbildung 16: Mediennutzung und „der“ Modellierungskreislauf

Literatur

- Bolt, B. (1995): Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun? ... und weitere technisch-mathematische Begegnungen. Ernst Klett Schulbuchverlag: Stuttgart
- Herold, S. (2009): Konzeption einer Lernlaborstation zum Thema: Die Mathematik des Baggers. Zulassungsarbeit für die erste Staatsprüfung für das Lehramt Mathematik an Gymnasien. Universität Würzburg
- Hischer, H. (2009): Was sind und was sollen Vernetzungen? In: Neubrand, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, WTM-Verlag: Münster, S. 635-638
- Ludwig, M. (2001): Projekte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Texte zur mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre 42. Franzbecker Verlag: Hildesheim, Berlin
- Roth, J. (2008a): Zur Entwicklung und Förderung Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht – Eine empirische Längsschnittuntersuchung. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 29 (2008), Heft 1, S. 20-45
- Roth, J. (2008b): Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel "Einparken". In: Leuders, T.; Oldenburg, R.; Ludwig, M. (Hrsg.): Experimentieren im Geometrieunterricht. Herbsttagung 2006 des GDM-Arbeitskreises Geometrie. Franzbecker: Hildesheim, Berlin, S. 109-128
- Roth, J. (2009): Geometrie und der Bagger – Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, WTM-Verlag: Münster, S. 167-171
- WDR (2010): Die Sendung mit der Maus. Sachgeschichten. Bagger. <http://www.wdrmaus.de/sachgeschichten/sachgeschichten/sachgeschichte.php?id=2561> (Zuletzt abgerufen am 30.04.2010)