RITA HOFMANN, JÜRGEN ROTH

Lernfortschritte identifizieren

Typische Fehler im Umgang mit Funktionen

LERNGRUPPE: 7./ 8. Schuljahr

IDEE: Fehler deuten auf noch zu bewältigende Lernschritte hin. Eine Übersicht über typische Fehler beim Arbeiten mit funktionalen Zusammenhängen soll helfen, individuelle Lernfortschritte zu erfassen.

Manche Schülerbearbeitungen weisen häufig vorkommende Mängel auf: Die Achsen eines Koordinatensystems werden falsch beschriftet, x- und y-Werte werden vertauscht, die Funktionsgleichung kann nicht hinsichtlich besonderer Merkmale untersucht werden oder ein Funktionsgraph wird als fotografisches Abbild der durch die Funktion beschriebenen Situation dargestellt. Solche typischen Fehler deuten darauf hin, dass wichtige Lernschritte für das Arbeiten mit Funktionen noch nicht oder nicht vollständig beschritten wurden.

Lernschritte erkennen

Auch wenn im Umgang mit Funktionen oft Flüchtigkeitsfehler auftreten, liegen daneben nicht selten systematische Fehler vor, die auf fehlerbehaftete oder nicht vollständig ausgebildete Vorstellungen zurückgehen. Eine entsprechende Diagnose kann jedoch nur gelingen, wenn wir Lehrkräfte typische Fehler beim Arbeiten mit Funktionen kennen.

Geeignete Aufgaben können dabei helfen, die unterschiedlichen Schülervorstellungen zu identifizieren. Bei der Analyse der Schülerlösungen ist es wichtig, diese auch grundsätzlich zu hinterfragen und nachzufragen, welche Überlegungen zum Lösungsweg für die jeweilige Aufgabe geführt haben. Im Folgenden werden zu wichtigen Lernschritten, die beim Arbeiten mit Funktionen zu durchlaufen sind, jeweils dabei typischerweise auftretende Fehler (vgl. **Tab. 1**) anhand von Aufgaben erläutert.

Eindeutige Zuordnung erfassen

Ein erster wichtiger Lernschritt beim Arbeiten mit Funktionen besteht im Verinnerlichen der Tatsache, dass bei einer Funktion einer (vorgegeben oder eingestellten) Größe eine andere Größe *eindeutig zugeordnet* wird. Innerhalb dieses Lernschritts tritt die *Missachtung der Eindeutigkeit der Zuordnung* (**Tab. 1, Fehler 2**) sehr häufig auf – auch in Verbindung mit anderen Fehlertypen. Wäre bei der in der Tabelle aufgeführten Achterbahnaufgabe ein Looping eingezeichnet worden (*Graph-als-Bild-Fehler*, vgl. **Tab. 1, Fehler 1**), so wäre auch hier die Eindeutigkeit verletzt.

Das Bewusstsein über die *Eindeutigkeit der Zuordnung* bei Funktionen kann also auch helfen, andere Fehler zu vermeiden. Doch dieses Bewusstsein muss erst im Gedächtnis der Lernenden verankert werden. Folglich sollte diese zentrale Eigenschaft von Funktionen regelmäßig im Unterricht thematisiert und in konkreten Situationen verdeutlicht werden, was die Missachtung der Eindeutigkeit für die jeweilige Situation bedeuten würde (im Beispiel der Achterbahnfahrt würde sich der Wagen nach einer bestimmten gefahrenen Strecke gleichzeitig in verschiedenen Höhen befinden).

Das Rückbeziehen auf die zugrunde liegende Situation unterstützt, im Gegensatz zu einem alleinigen Bezug zur Definition, die Ausbildung geeigneter Vorstellungen. Dies kann auch dazu beitragen, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehlern, die auf einer Übergeneralisierung der Eindeutigkeit beruhen (vgl. **Tab. 1, Fehler 3**), zu vermindern.

Welche Aspekte sollten noch einmal bewusst gemacht werden?

Abhängige und unabhängige Größe erfassen

Bei Funktionen geht es um gerichtete Zusammenhänge, und ein zentraler Lernschritt ist die Unterscheidung der unabhängigen und der abhängigen Größe. Schülerinnen und Schülern scheint dieser Lernschritt häufig schwerzufallen. In der Tat werden oft Situationen bearbeitet, aus denen zwei verschiedene funktionale Abhängigkeiten abzuleiten sind, je nachdem aus welcher Perspektive man die Situation betrachtet.

Soll etwa ein Schaubild der Zuordnung von zurückgelegten Kilometern zur Zeit erstellt werden, wird oft der Zusammenhang umgedreht (vgl. **Tab. 1, Fehler 4** Schülerlösung). Auf den ersten Blick scheint dieses Vorgehen nicht tragisch zu sein, können doch aus dem erstellten Schaubild dieselben Informationen gewonnen werden. Problematisch wird es allerdings, wenn die Geschwindigkeit betrachtet wird: Aus dem intendierten Schaubild ließe sich schnell ablesen, welches Boot schneller fährt (Graph mit größerer Steigung); in der Schülerlösung kennzeichnet der steilere Funktionsgraph allerdings das

Foto: © JackF / stock.adobe.com

langsamere Boot (für eine bestimmte Strecke wird hier mehr Zeit benötigt).

Wie daher deutlich gemacht werden sollte, führt das Vertauschen der unabhängigen und abhängigen Variable zu unterschiedlichen Interpretationen und darf nicht unterschätzt werden. Sie können daher unterstützend

- das genaue Lesen der Aufgabenstellung einfordern und einüben
- Schlüsselwörter markieren lassen
- Situationen thematisieren, die sich nicht umkehren lassen bzw. deren Umkehrung keine Funktion ergibt (etwa durch Verlust der Eindeutigkeit).

Auch das Vertauschen der x- und y-Koordinate beim Einzeichnen von Punkten eines Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem (**Tab. 1, Fehler 5**) kann auf ein fehlendes Verständnis für den Unterschied zwischen abhängiger und unabhängiger Größe hindeuten. Weitere Gründe könnten sein: fehlendes Wissen/Verinnerlichen der Konvention, die unabhängige Größe auf der x-Achse anzutragen, oder Unsicherheit bzgl. der Reihenfolge von Punktkoordinaten.

Koordinatensystem erstellen

Ein eigener Lernschritt ist es, die Fähigkeit zum Darstellungswechsel zwischen der Situation und mathematischen Darstellungen (z. B. Funktionsgraph) zu entwickeln. Dazu muss ein Koordinatensystem erstellt werden (der Umgang damit muss ebenfalls zunächst erlernt werden und ist selbst fehleranfällig). So wird gern der positive Bereich der x-Achse nicht nach Konvention rechts vom Koordinatenursprung angetragen, sondern links, der negative Bereich dagegen rechts (**Tab. 1, Fehler 6**).

Auch bei der Achsenskalierung neigen Lernende zur Annahme, die Achsen müssten identisch skaliert sein (s. **Tab. 1, Fehler 7**), was nicht nur zu Problemen beim Erstellen von Graphen führt, die sehr unterschiedliche Größenordnungen der x- und y-Werte aufweisen, sondern auch später beim Einzeichnen von Werten in und Ablesen aus Graphen zu Fehlern führt (vgl. **Tab. 1, Fehler 8**).

Graph: Werte eintragen und ablesen

Das Einzeichnen von Punkten in einen und Ablesen von Werten aus einem Graphen erweist sich als weiterer Lernschritt, der überraschend fehleranfällig ist (s. **Tab. 1, Fehler 8 bis 12**).

Bezug zur Situation herstellen

Bei diesem Lernschritt wird die Fähigkeit ausgebildet, zwischen Situation und einer mathematischen Darstellung, wie dem Funktionsgraphen, zu wechseln. Dies ist fehleranfällig (**Tab. 1, Fehler 13 bis 20**), weil die Situation erst erfasst und anschließend (graphisch) modelliert werden muss. Eine zu intensive einseitige Auseinandersetzung mit linearen und proportionalen Zusammenhängen zu Beginn der schulischen Arbeit mit Funktionen führt zur *Illusion der Linearität.* In deren Folge wird jeder Zusammenhang als linear oder sogar proportional modelliert (s. **Tab. 1, Fehler 13**).

Einzelne Punkte können häufig noch bestimmt und ins Koordinatensystem eingetragen werden. Doch was passiert dazwischen? Dürfen die Punkte miteinander verbunden werden? Und wenn ja, wie sollen sie verbunden werden? Meist neigen Schülerinnen und Schüler dazu, die eingezeichneten Punkte linear bzw. stückweise linear zu verbinden. Ob dies der jeweiligen Situation entspricht, wird selten hinterfragt. Lineare Funktionen sind vertraut und es erscheint naheliegend, Punkte linear miteinander zu verbinden, besonders wenn sie „theoretisch“ auf einer Linie liegen. Ob ein solches Verbinden der Situation entspricht oder nicht, muss ebenso wie die Bedeutung der Linie zwischen den gemessenen Punkten stets reflektiert werden. Häufig liegt ein fehlendes Verständnis des Graphen als unendliche Punktmenge vor.

Im Aufgabenbeispiel zu diesem Fehlertyp werden als Leihgebühr für ein Fahrrad – neben einem Anfangspreis von 5 € für die erste Stunde – pro weitere angefangene Stunde zusätzlich 2 € berechnet (s. **Tab. 1, Fehler 14**). Eine durchgezogene Linie würde einen kontinuierlichen Preisanstieg bedeuten und keine stundenweise Berechnung. An dieser Stelle kann die Nachfrage, wie viel man zwischen den ganzen Stunden bezahlen muss, und der Vergleich der Antwort mit dem eigenen Graphen helfen. Die hieraus gewonnene Erkenntnis (Preisgleichheit) stellt die Lernenden unweigerlich vor das Problem, wie der Graph korrekt auszusehen hat. Theoretisch könnte das Zeichnen des Graphen nun gelingen, doch ist dieser dann noch das Abbild einer Funktion?

Eigene Vorstellungen mit der Definition abgleichen

Häufig wissen Schülerinnen und Schüler, wie die Definition einer Funktion lautet, und sie scheinen prinzipiell in der Lage zu sein, diese anzuwenden. Doch wie sieht es mit ihren mentalen Bildern, ihren Vorstellungen aus, die sie bezüglich der Funktionen „abgespeichert“ haben?

Funktionen, die noch nicht im Unterricht thematisiert wurden (z. B. abschnittsweise definierte, unstetige, diskrete oder konstante Funktionen) werden oft nicht als Funktionen anerkannt, obwohl sie alle formalen Kriterien der Definition erfüllen. So gelangen viele Lernenden (mit Hilfen) selbstständig zum richtigen Ergebnis der Fahrradleihaufgabe (**Tab. 1, Fehler 22**). Dennoch fällt es ihnen schwer zu akzeptieren, dass auch solche „seltsame“ Treppen-Graphen Funktionen darstellen. Dazu sollten im Unterricht frühzeitig auch untypische funktionale Zusammenhänge sowie deren Funktionsgraphen vorkommen und die Vereinbarkeit der verinnerlichten Definition mit dem neuen Graphentyp erfahrbar werden.

Bestand und Änderung unterscheiden

Gelernt werden muss auch, den Bestand von der Änderung zu unterscheiden. Dies ist fehleranfällig: Wird etwa nach der Änderung an einer Stelle bzw. in einem Bereich gefragt, dann wird statt der Änderung häufig der Bestand (der y-Wert an der Stelle bzw. die y-Werte im Bereich) betrachtet und genannt (vgl. **Tab. 1, Fehler 21**).

Schlussgedanke

Die Kenntnis typischer Fehler beim Arbeiten mit Funktionen erleichtert es, wichtige Lernschritte bei Schülerinnen und Schülern zu identifizieren. Durch den Einsatz geeigneter Aufgaben aufgedeckt, können die Schülervorstellungen gezielt revidiert bzw. erweitert werden. Auch das Thematisieren typischer Fehler in der Klasse kann ein

erstes Sensibilisieren für die Problematik bewirken. Das beharrliche Nachfragen und Erklärenlassen kostet zunächst zwar Zeit, zahlt sich aber langfristig aus.

Literatur

Busch, J. (2015): Graphen „laufen“ eigene Wege: Was bei Funktionen schiefgehen kann. – In: mathematik lehren 191, S. 30–32.

Clement, J. (1985): Misconceptions in graphing. – In: Streefland, L. (Hrsg.): Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht S. 369–375.

Hadjidemetriou, C./Williams, J. (2002): Children's graphical conceptions. – In: Research in Mathematics Education, 4(1), S. 69–87.

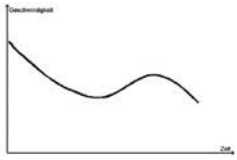
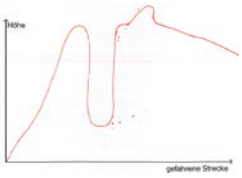
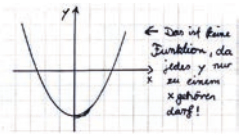
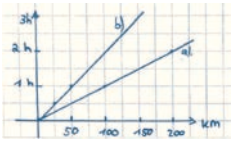
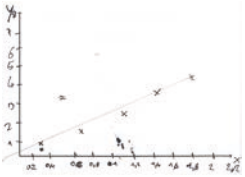
Leinhardt, G./Zaslavsky, O./Stein, M. K. (1990): Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. – In: Review of Educational Research 60 (1), S. –64.

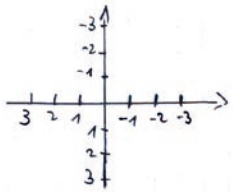
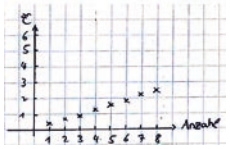
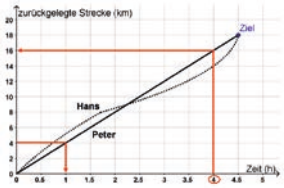
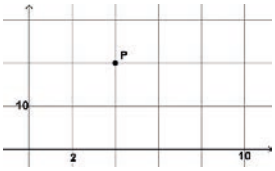
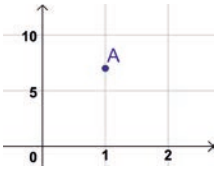
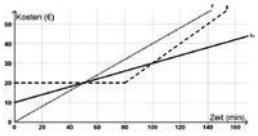
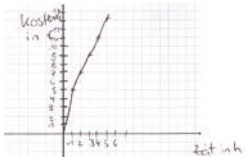
McDermott, L. C./Rosenquist, M. L./van Zee, E. H. (1987): Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics – In: American Journal of Physics 55 (6), S. 503–513.

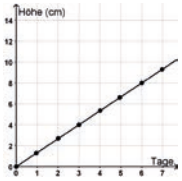
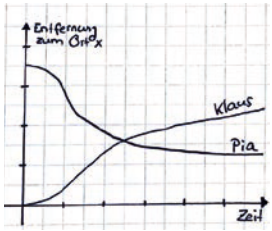
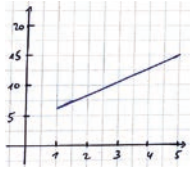
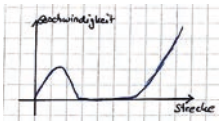
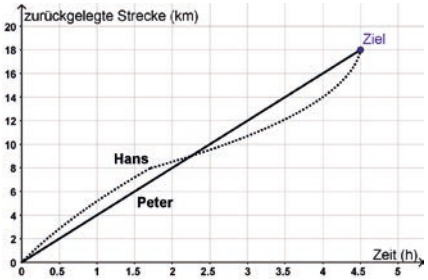
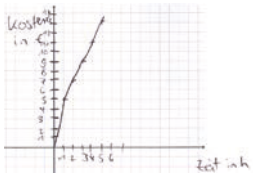
Nitsch, R. (2015): Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Tall, D./Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. – In: Educational Studies in Mathematics 12 (2), S. 151–169.

Tab. 1: Lernschritte beim Arbeiten mit Funktionen und dabei auftretende typische Fehler

	typischer Fehler	Aufgabenbeispiel	Schülerbearbeitung
Eindeutige Zuordnung erfassen	**1. Graph-als-Bild-Fehler** Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs gesehen, bei dem einer Größe (auf der *x*-Achse) eine andere Größe (auf der *y*-Achse) zugeordnet wird, sondern als fotografisches Abbild der Realität.	Ein Skifahrer fährt, wie im Bild dargestellt, eine Piste hinunter. Wie sieht das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu der gegebenen Situation aus? Wähle aus.	
	2. Eindeutige Zuordnung missachten Einem *x*-Wert werden mehrere *y*-Werte zugeordnet.	Bei einer Achterbahnfahrt kommen neben dem Aufstieg eine Schlucht (hier geht es erst steil hinunter und dann gleich wieder hoch), ein Looping und eine Spirale abwärts vor. Zeichne einen Graphen, der der gefahrenen Strecke jeweils die Höhe des Wagens auf der Achterbahn zuordnet.	
	3. Von eindeutiger Zuordnung auf Injektivität schließen Die Aussage „Jedem *x* wird genau ein *y* zugeordnet“ wird fälschlich interpretiert als „Auch jedes *y* darf nur einmal vorkommen“.	Handelt es sich bei dem gezeichneten Graphen um einen Funktionsgraphen?	
Abhängige und unabhängige Größe erfassen	**4. Abhängige und unabhängige Größe vertauschen** Die unabhängige und die abhängige Größe werden vertauscht. Es wird nicht erfasst, welche Größe variiert wird und welche sich dadurch aus dem funktionalen Zusammenhang ergibt.	Sven betrachtet die Durchschnittsgeschwindigkeit zweier Boote. a. Je Stunde können mit dem Boot Ahoi bis zu 100 km gefahren werden. b. In einer halben Stunde legt das Boot Poseidon bis zu 25 km zurück. Zeichne Graphen zu den beiden gegebenen funktionalen Zusammenhängen.	
	5. *x*- und *y*-Koordinate vertauschen Beim Eintragen von Zahlenpaaren in ein Koordinatensystem werden die *x*- und die *y*-Koordinate vertauscht.	Erstelle zu der Tabelle einen Funktionsgraphen. **x** / **f(x)** 1 / 0,35 2 / 0,70 3 / 1,15 4 / 1,50 5 / 1,85	

	typischer Fehler	Aufgabenbeispiel	Schülerbearbeitung
Koordinatensystem erstellen	**6. Positive und negative Bereiche der Achse(n) vertauschen** Unter anderem wird der positive Bereich der *x*-Achse nicht nach Konvention rechts vom Koordinatenursprung angetragen, sondern links davon, der negative Bereich dagegen rechts.	Erstelle ein Koordinatensystem mit vier Quadranten.	
	7. Achsen skalieren Dies ist häufig mit der Annahme verbunden, die Achsen müssten identisch skaliert sein.	Ein Bonbon kostet 30 Cent. Zeichne zu dem funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bonbons und dem zu zahlenden Preis einen Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem.	
Punkte einzeichnen und Werte ablesen	**8. *x*-Wert zu einem *y*-Wert ablesen** Hierbei handelt es sich um die umgekehrte Vorgehensweise: Zu einem gegebenen Funktionswert muss der zugrunde liegende *x*-Wert ermittelt werden. Wird dies nicht erkannt, wird ein falsches Ergebnis ermittelt.	Lies am Graphen ab: Wann hat Peter 4 km zurückgelegt? 	Nach 16 km
	9. Achsenskalierung missachten Die vorhandene Achsenskalierung wird nicht beachtet. Stattdessen wird eine intuitive (z. B. Schrittweite eins) oder eigene Skalierung herangezogen.	Bestimme die Koordinaten des Punktes P. 	P(3,2)
	10. Negative Koordinaten verorten Die Probleme mit negativen Zahlen und deren Verortung am Zahlenstrahl finden sich auch im Umgang mit Koordinatensystemen.	Zeichne die Punkte P(3,5|0) und Q(-6|2) in ein Koordinatensystem.	
	11. Interpolieren Liegen Punkte nicht auf dem Koordinatengitter, werden zur Bestimmung bzw. zum Einzeichnen der Koordinaten Abschätzungen (Interpolationen) benötigt, die häufig misslingen.	Notiere die Koordinaten des Punktes A. 	A(1,8)
	12. Sichtbaren Graphen als vollständige Funktion auffassen Es wird fälschlicherweise davon ausgegangen, dass der dargestellte Funktionsgraph die gesamte Funktion abbildet.	Dargestellt sind drei Angebote einer Kartbahn. Jonas möchte 3 h auf der Kartbahn verbringen. Welches Angebot sollte er wählen? 	Es können immer nur maximal 160 min am Stück gefahren werden.
Bezug zur Situation herstellen	**13. Alles ist linear oder proportional** Es gibt die Tendenz, funktionale Zusammenhänge unabhängig von der zugrunde liegenden Situation grundsätzlich als linear oder proportional anzunehmen.	Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlänge des Quadrats verdoppelt?	Die Fläche verdoppelt sich.
	14. Punkte verbinden?! Unsicherheit, ob das Verbinden von Punkten erlaubt bzw. sinnvoll ist. Wie müssen in der Situation Punkte ggf. verbunden werden (Typ des funkt. Zusammenhangs)? Oft wird fälschlich (stückweise) linear verbunden.	In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 € und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 €. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation!	

	typischer Fehler	Aufgabenbeispiel	Schülerbearbeitung
Bezug zur Situation herstellen	**15. Linien durch Punkte interpretieren** Unsicherheit, wie eine Linie durch Punkte des Graphen zu interpretieren ist (Funktionsgraph; Interpolations- bzw. Ausgleichsgerade; Visualisierung von Veränderungen)	Drei Mädchen betrachten das Wachstum ihrer Pflanzen und messen täglich deren Höhe. Sie stellen ihre Ergebnisse in einem Koordinatensystem dar. Um die Veränderungen zu vergleichen, hat jede eine Linie durch die Punkte gezogen. Stellt die Linie das Wachstum der Pflanzen realistisch dar?	 Ja
	16. Punkte bzgl. Situation interpretieren Unsicherheit bei der Interpretation von Punkten des Graphen bzgl. der Situation. Hier kann auch eine Unsicherheit bzgl. der betrachteten Größen bestehen oder ein falscher Zusammenhang angenommen werden.	Erkläre, was der Schnittpunkt der beiden Graphen für die Situation bedeutet. 	Der Schnittpunkt bedeutet, dass beide die gleiche Geschwindigkeit haben.
	17. Achsenabschnitte ↔ Situation Wie sind Achsenabschnitte bzgl. einer Situation zu interpretieren? Welcher *y*-Achsenabschnitt ergibt sich aus der Situation? Wo ist dieser im Koordinatensystem zu verorten?	Lars hat von seinem Bruder das alte Handy für 6 € bekommen. Er hat keine Flatrate, sondern bezahlt im Durchschnitt pro Woche 2,50 €. Entscheide, ob sich eine Flatrate von 12,99 € im Monat für ihn lohnen würde.	
	18. Konstante Graphenabschnitte Wie sind konstante Graphenabschnitte (parallel zur *x*-Achse) zu interpretieren?	Ein Radfahrer fährt nach dem Start einen Berg hinauf. Oben angekommen fährt er eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit, bevor es wieder den Berg hinuntergeht. Zeichne einen Graphen, welcher die Geschwindigkeit des Radfahrers über die gefahrene Strecke darstellt.	
	19. Keine Änderung ↔ *y*-Wert 0 Annahme: Keine Änderung entspricht dem Funktionswert 0.		
	20. Steigungen interpretieren Wie ist die Steigung des Graphen insgesamt/ in versch. Abschnitten zu interpretieren? Schwierigkeit beim Vergleich der Steigungen an verschiedenen Stellen bzw. Graphen.	Welcher der beiden Wanderer ist in der letzten halben Stunde schneller gelaufen? 	Peter war schneller, weil er sein Tempo gehalten hat
Bestand & Änderung	**21. Änderung und Bestand verwechseln** Wird nach der Änderung an einer Stelle bzw. in einem Bereich gefragt, dann wird statt der Änderung häufig der Bestand (der *y*-Wert an der Stwelle bzw. die *y*-Werte im Bereich) betrachtet. Oder umgekehrt.		Peter weil seine Linie höher ist.
Abgleich: Vorstellungen & Definition	**22. Vorstellungen ↔ Definition** Ungewohnt aussehende Graphen, die nicht zu eigenen Vorstellungen passen, werden nicht als Funktionsgraphen akzeptiert, obwohl sie es definitionsgemäß sind. Häufig nicht als „richtige“ Funktionen angesehenen werden u. a. Funktionen, • die abschnittsweise definiert sind, • die unstetig oder diskret sind, • die konstant sind oder • deren Graphen nicht im Ursprung beginnen.	In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 € und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 €. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation!