

# Wie beeinflussen Simulationen das funktionale Denken? Ergebnisse einer quantitativen Studie qualitativ beleuchtet

Michaela Lichti, Jürgen Roth

Das funktionale Denken von Sechstklässlern lässt sich durch den Einsatz von Computer-Simulationen (GeoGebra) und gegenständlichen Materialien positiv beeinflussen. Der Effekt von Simulationen ist allerdings deutlich größer. Vorgestellt wird neben der quantitativen Analyse eine qualitative Untersuchung von Schülerdokumenten, die während einer Intervention mit Materialien und Simulationen zum funktionalen Denken entstanden sind. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass Simulationen andere Aspekte des funktionalen Denkens fördern als gegenständliche Materialien. Ein kombinierter Einsatz beider Medien scheint daher erstrebenswert.

## Einleitung

Funktionale Zusammenhänge sind ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts, sie sind relevant für andere Fächer wie Politik oder Naturwissenschaften und Teil unseres Alltags. Leider zeigen Studien immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler (SuS) erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit dieser Thematik haben (Leinhardt et al., 1990). Es gelingt ihnen nicht, ihr Verständnis von funktionalen Zusammenhängen, ihr funktionales Denken angemessen zu entwickeln. Oft steht ihr persönliches *concept image* (Tall & Vinner, 1981) der offiziell anerkannten Definition, dem *concept definition* (ebd.) entgegen. Des Weiteren zeigt sich wiederholt, dass SuS zahlreiche Fehlvorstellungen mit Blick auf funktionale Zusammenhänge haben (Nitsch, 2015). Beispielhaft sei auf den Graph-als-Bild Fehler verwiesen. Basierend auf der Relevanz der Thematik und den Schwierigkeiten der SuS mit ihr ergibt sich die Notwendigkeit, das funktionale Denken von SuS zu fördern. Die Theorie verweist hierzu auf die Verwendung von gegenständlichen Materialien und Computer-Simulationen, die im Rahmen von Experimenten zum Einsatz kommen. Durchgeführt wurde eine Interventionsstudie, die den Einfluss dieser beiden Medien auf das funktionale Denken zunächst quantitativ empirisch untersucht und diese Ergebnisse im nächsten Schritt qualitativ beleuchtet hat. Vorgestellt werden die Interventionsstudie, die Ergebnisse der quantitativen und qualitativen Analysen sowie deren Interpretation und Implikationen.

## Theoretischer Hintergrund

### *Funktionales Denken*

Funktionales Denken unterteilt sich in drei grundlegende Aspekte (Vollrath, 1989). (1) Der Zuordnungsaspekt umfasst, dass jedem Element  $x$  aus der Definitionsmenge genau ein Element  $y$  aus der Wertemenge zugeordnet wird. (2) Der Aspekt des Änderungsverhaltens nimmt die Änderung der abhängigen Variablen in Abhängigkeit von der Änderung der unabhängigen Variablen in den Blick. (3) Der Objektaspekt beschreibt, dass die Funktion als Ganzes betrachtet wird, sie wird als eigenständiges Objekt erfasst. Dies geschieht beispielsweise, wenn Funktionen addiert oder subtrahiert werden. Ein weiterer Ansatz, funktionales Denken zu beschreiben, verwendet die vier Repräsentationsformen verbale Beschreibung, Funktionsgleichung, Graph und Tabelle. Wenn SuS in der Lage sind, diese Formen zu verwenden, zu interpretieren und in einander zu überführen bzw. miteinander zu verknüpfen, spricht man von funktionalem Denken (Nitsch, 2015).

### *Die Vorteile von Gegenständliche Materialien und Computer-Simulationen*

Die Arbeit mit gegenständlichen Materialien ermöglicht es den SuS, funktionale Zusammenhänge zu erleben (Ludwig & Oldenburg, 2007). Ein Zusammenhang kann im wörtlichen Sinne begriffen und eine starke Verknüpfung zwischen mathematischer Darstellung und Realität geschaffen werden. Lernen wird nachhaltig (vom Hofe, 2003) und SuS verinnerlichen Ergebnisse und mathematische Arbeitsmethoden besser (Vollrath, 1987). Auch nach längerer Zeit greifen SuS auf die so vermittelten Inhalte zurück (Barzel & Ganter, 2010). Außerdem hat die Arbeit mit gegenständlichen Materialien einen positiven Einfluss auf die Motivation der SuS. Durch Computer-Simulationen bzw. die Verwendung von dynamischer mathematischer Software (DMS, in Rahmen dieser Studie GeoGebra) können SuS einen funktionalen Zusammenhang erkunden (Elschenbroich, 2011). Durch systematische Variation (Roth, 2008) von Variablen werden die Auswirkungen einzelner Parameter auf Graph, Tabelle und Funktionsvorschrift direkt sichtbar. Änderungsverhalten wird so z. B. erlebbar (Vollrath & Roth, 2012). Des Weiteren können verschiedenen Repräsentationsformen miteinander verknüpft werden, das Multi-Repräsentations-System erleichtert den Wechsel zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen (Roth, 2008). Die Simulation wird so

Mittler zwischen SuS und mathematischem Phänomen (Danckwerts et al., 2000).

## **Studiendesign und Intervention**

Die Studie folgte einem Pre-Posttest-Control-Group Design. Es nahmen  $N = 282$  SuS der Jahrgangsstufe 6 aus 13 Klassen von 4 Schulen teil. Die Wahl fiel auf SuS der Jahrgangsstufe 6, um zu verhindern, dass sich Fehlvorstellungen bereits manifestiert hatten und um zwischen den verschiedenen Klassen sich entsprechende Ausgangsbedingungen zu schaffen. Denn funktionale Zusammenhänge werden erst ab Klasse 7 unterrichtet. Die SuS wurden randomisiert auf zwei Experimentalgruppen (EG1 mit  $N = 111$ , EG2 mit  $N = 121$ ) und eine Kontrollgruppe (KG mit  $N = 48$ ) verteilt. Die KG konnte aus organisatorischen Gründen nicht in die Randomisierung aufgenommen werden. Sie wurde lediglich verwendet, um einen möglichen Testeffekt auszuschließen. Alle Gruppen bearbeiteten zunächst eine Pretest zum funktionalen Denken. Es handelt sich um einen Paper-Pencil-Test, der auf Grundlage von Items aus PISA, TIMMS und VERA 8 selbst entwickelt und in einer Vorstudie mit  $N = 221$  SuS validiert und auf seine Reliabilität hin überprüft wurde. Er beinhaltet 44 Items und orientiert sich an den Aspekten nach Vollrath, um das funktionale Denken abzudecken. Nach einer Woche nahmen die Experimentalgruppen an der Intervention (4 Schulstunden an einem Vormittag) zum funktionalen Denken teil. EG1 arbeitet in Einzelarbeit angeleitet durch Aufgaben ausschließlich mit gegenständlichen Materialien, EG2 mit Computer-Simulationen gestaltet mit GeoGebra. Danach bearbeiteten beide Gruppen den Posttest zum funktionalen Denken, der der KG ebenfalls vorgelegt wurde.

### *Die Intervention*

Ziel der Intervention war die Förderung des funktionalen Denkens von SuS der 6. Jahrgangsstufe. Im Fokus stand das qualitative Verständnis funktionaler Zusammenhänge. Die syntaktische Repräsentationsform wurde dementsprechend und wegen des nicht vorhandenen Vorwissens der SuS ausgespart. Grundlage der Intervention waren verschiedene Kontexte, zu denen die SuS Experimente unter Verwendung eines der beiden Medien durchführen mussten. Die SuS wurden mittels Aufgaben durch die Experimente, deren Aus-

wertung und Interpretation geleitet. Entscheidend war es, vergleichbare Settings zu generieren: Die Kontexte mussten in beiden Settings umsetzbar sein, vergleichbare Aktionen der SuS induzieren und für die Altersstufe angemessen sein. Zudem sollten die Kontexte unterschiedliche funktionale Zusammenhänge (linear, kubisch, beliebig, diskret und stetig) abdecken und die im theoretischen Hintergrund benannten Vorteile, die jedes Medium mit sich bringt, nutzbar machen. Die Vorteile der Medien sollten explizit nicht zu Gunsten der Vergleichbarkeit nivelliert werden. Denn nur, wenn die Vorteile beider Medien und damit wesentliche Unterschiede erhalten blieben, konnten Aussagen über den Einfluss der im Unterricht zu verwendenden Medien auf das funktionale Denken getroffen werden. Materialien und Simulationen werden im Unterricht schließlich gerade wegen ihrer Vorteile verwendet. Um Ergebnisse mit größtmöglicher Relevanz für die Schule zu erhalten, war die ökologische Validität daher als bedeutender anzusehen als die methodisch wünschenswerte absolute Angleichung der Settings. Der wesentlichste Unterschied zwischen den Settings bestand in der Art, wie SuS mit der graphischen Repräsentationsform arbeiteten. Die SuS aus der Materialgruppe mussten Graphen selbst zeichnen, die SuS der Simulationsgruppe beobachteten die Entstehung des Graphen im Koordinatensystem auf der Oberfläche von GeoGebra.

### Die Kontexte - ein Beispiel

Ausgewählt wurden als Kontexte *Kreise abrollen* (Durchmesser und Umfang eines Kreises), *Würfel bauen* (Kantenlänge und Volumen eines Würfels angegeben durch die Anzahl von Einheitswürfeln), *Gefäße füllen* (Füllvolumen und Füllhöhe eines Gefäßes) und *Bleistifte spitzen* (Spitzbewegungen und verbleibende Länge eines Bleistifts). Beispielhaft wird der Kontext *Würfel bauen* vorgestellt.

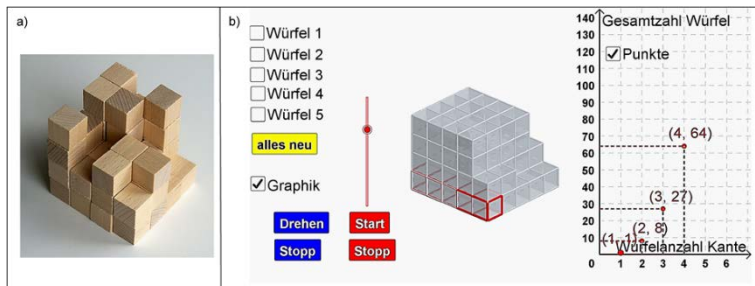


Abb. 1: a) Gegenständliche Materialien und b) Oberfläche der Simulation zu *Würfel bauen*.  
(Quelle: Privat)

Als Materialien (vgl. Abbildung 1a) erhielten die SuS der EG1 125 Holzwürfel. Das Experiment bestand daraus, aus den kleinen Würfeln jeweils einen großen Würfel mit einer Kantenlänge von ein, zwei, drei, vier oder fünf kleinen Würfeln zu bauen. Die SuS sammelten die Werte in einer Tabelle und trugen die Punkte dann in ein Koordinatensystem ein. Die Simulation (Abbildung 1b) ermöglichte ein äquivalentes Vorgehen für die EG2. Zunächst wurden die verschiedenen Würfel „gebaut“. Die SuS konnten durch Auswahl des Start-Buttons beobachten, wie die kleinen Würfel zusammengesetzt wurden, oder den Schieberegler hierzu verwenden. Sie konnten stoppen und den Würfel drehen und so die gesuchten Werte ermitteln. Durch Auswahl von *Graphik* öffnete sich das 2. Fenster. Wurde die Simulation dann erneut abgespielt, konnten die SuS beobachten, wie die zugehörigen Punkte im Koordinatensystem erschienen.

### *Aufgabengestaltung*

Die SuS wurden anhand verschiedener Aufgabentypen durch die Intervention geleitet. Wir unterschieden Aufgaben zum (i) Schätzen, (ii) Experimentieren, (iii) Verständnis des jeweiligen Zusammenhangs, (iv) Verständnis der graphischen Repräsentationsform, (v) Anwenden (Bezug zu den Ergebnissen des Experiments) und (vi) Transfer (Aufgaben zum gleichen Kontext, die über das Experiment hinausgehen). Die Aufgaben der Kontexte, die am Anfang der Intervention standen, fokussierten die Aufgabentypen (i)-(iv). Die Aufgaben zu Kontexten der zweiten Hälfte der Intervention legten den Schwerpunkt auf die Typen (v) und (vi). Wichtig war es, die Aufgaben in beiden Settings äquivalent bzw. wenn möglich identisch zu gestalten. Außerdem musste sichergestellt werden, dass die SuS nicht zu völlig falschen Schlüssen kamen. Daher gab es Hilfekarten und in die Abfolge der Aufgaben eingepflegte Lösungen. Das gesamte Setting – die Materialien, Simulationen und Aufgaben - wurde im Rahmen einer Vorstudie auf seine Verwendbarkeit und die Äquivalenz hin getestet. Dazu bearbeiteten 30 SuS in Gruppen die Aufgaben unter Verwendung des jeweiligen Mediums, während sie gefilmt wurden. Die Videoaufzeichnungen wurden ausgewertet und basierend auf den Ergebnissen wurden die Medien und Aufgaben optimiert.

## **Auswertungsmethodik der quantitativen Analyse**

Ausgewertet wurden die Daten aus Pre- und Posttest mittels Item Response Theorie. Zunächst wurden die Daten auf Rasch-Skalierbarkeit hin überprüft (Rost, 2004). Nach Überprüfung der Voraussetzungen (Normalverteilung, Varianzhomogenität) wurden die mit einem 2-dimensionalen Raschmodell ermittelten Fähigkeitswerte des SuS aus Pre- und Posttest mittels mixed ANOVA und pairwise t-Test (Bonferroni-Korrektur) verglichen. Die Ergebnisse der Kontrollgruppe wurden mit Wilcoxon-signed-Rank Test analysiert.

## **Ergebnisse der quantitativen Analyse**


Die Ergebnisse unserer Studie zeigen, dass sowohl der Einsatz von gegenständlichen Materialien ( $p < 0.001$ ,  $d = 0.46$ ) als auch die Verwendung von Computer-Simulationen ( $p < 0.001$ ,  $d = 0.85$ ) geeignet ist, das funktionale Denken von Sechstklässlern zu fördern. Des Weiteren ergibt sich, dass in unserem konkreten Setting mittels Computer-Simulationen eine signifikant größere Steigerung des funktionalen Denkens erreicht wird ( $F = 8.86$ ,  $p = 0.006^{**}$ ,  $\eta_p^2 = 0.090$ ). Die Kontrollgruppe weist keinen signifikanten Zuwachs ihres funktionalen Denkens auf ( $V = 423$ ,  $p = 0.091$ ).

## **Qualitative Analyse**

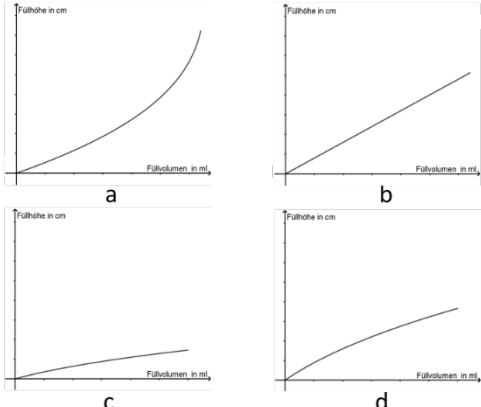
Um mögliche Ursachen für dieses quantitativ empirische Ergebnis ermitteln zu können, wurde es qualitativ beleuchtet. Die Grundlage der qualitativen Analyse waren die schriftlich vorliegenden SuS-Antworten zur Aufgabe *Viele Gefäße* (vgl. Abbildung 2), die während der Intervention zum Kontext Gefäße füllen bearbeitet wurde, und die Antworten zur Aufgabe *Rennwagen*, die Teil des Nachtests war. Beide Aufgaben verlangten die Zuordnung einer realen Situation zur graphischen Repräsentation des jeweiligen fokussierten Zusammenhangs. Die SuS mussten ihre Zuordnung in beiden Fällen begründen. Diese Begründungen wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse untersucht (Mayring, 2008). Nachdem induktiv Kategorien gebildet worden waren, wurde jeweils ein Rating ( $N = 2$ ) und anschließend eine kommunikative Validierung durchgeführt. Der Vergleich der Häufigkeiten der Kategorien zwischen den Experimentalgruppen wurde mit Chi<sup>2</sup>-Test durchgeführt. Die

Interpretation der unterschiedlichen Häufigkeiten ließ Schlüsse über den Einfluss der beiden Medien auf das funktionale Denken zu.

Hier siehst du verschiedene Gefäße und Graphen.  
Sortiere sie einander zu und gib eine kurze Begründung für deine Wahl an.



1                      2                      3                      4



a                      b

c                      d

Abb. 2: Aufgabe „Viele Gefäße“ (eigener Entwurf)

### Auswertung der Aufgabe „Viele Gefäße“

Die SuS mussten zur Lösung dieser Aufgabe vier als Fotografie abgebildete Gefäße zu vier vorgegeben Füllgraphen zuordnen und ihre Wahl begründen. Basierend auf den Begründungen wurden induktiv fünf Kategorien gebildet, die das Schülerantwortverhalten beschreiben. Zunächst wurde unterschieden, ob die SuS ihre Zuordnung mittels der *Form des Gefäßes* (F), dem *Verlauf des Graphen* (G) oder dem *Ansteigen des Wassers* (A) begründeten. Diese Kategorien konnten pro Schülerantwort sowohl ausschließlich als auch in Kombination auftreten. Als weitere Kategorien ergaben sich *Zustand* (Z) und

*Veränderung* (V). Nachdem alle Schülerantworten bereits auf die Verwendung von Form, Graph und Ansteigen des Wassers hin untersucht worden waren, wurde zusätzlich jede Begründung dahingehend codiert, ob die SuS einen Zustand (des Gefäßes, des Graphen oder des Füllstands) oder eine Veränderung (des Gefäßes, des Graphen oder des Füllstands) fokussiert hatten. Die Begründung *Die Schale ist flach*. erhielt daher den Code FZ. Der Bezug zur Schale lieferte die Kategorie *Form*, die Formulierung *ist flach* wurde als Zustandsbeschreibung gewertet. Im Gegensatz dazu erhielt die Antwort *Der Graph wird immer steiler*. den Code GV. Der Verweis auf den Graphen ist offensichtlich, die Formulierung *wird immer* deutet daraufhin, dass der betreffende Schüler bzw. die Schülerin den Verlauf und die damit einhergehende Veränderung des Graphen betrachtet hat. Das Verb *werden* ist hierfür besonders kennzeichnend.

#### *Ergebnisse zur Aufgabe „Viele Gefäße“*

Die Interrater-Reliabilität für alle Kategorien liegt zwischen [0.869; 0.986]. Der Vergleich der Häufigkeiten ergibt einen Unterschied zwischen den Gruppen hinsichtlich der Verwendung der Kategorien Form und Graph in ihrer ausschließlichen und in ihrer kombinierten Form. Die Kategorie Form findet sich in der Materialgruppe signifikant häufiger (ausschließlich:  $\chi^2 = 4.16$ ,  $p = 0.04^*$ , *Cramers' V* = 0.08; kombiniert:  $\chi^2 = 14.79$ ,  $p < 0.001$ , *Cramers' V* = 0.15), die Kategorie Graph hingegen in der Simulationsgruppe (ausschließlich:  $\chi^2 = 15.08$ ,  $p < 0.001$ , *Cramers' V* = 0.16; kombiniert:  $\chi^2 = 6.62$ ,  $p = 0.01^*$ , *Cramers' V* = 0.10). Des Weiteren zeigen sich signifikante Unterschiede in Bezug auf die Verwendung von Zustand und Veränderung. Die Materialgruppe verweist signifikant häufiger auf einen Zustand ( $\chi^2 = 4.361$ ,  $df = 1$ ,  $p = 0.037^*$ , *Cramers' V* = 0.08), die Simulationsgruppe signifikant häufiger auf eine *Veränderung* ( $\chi^2 = 6.955$ ,  $df = 1$ ,  $p = 0.008^{**}$ , *Cramers' V* = 0.11).

#### *Deutung*

Die Ergebnisse liefern unter Berücksichtigung der kleinen und teilweise vernachlässigbaren Effektstärken lediglich erste Hinweise. Diese gehen dahin, dass die Verwendung von Simulationen zur Förderung des funktionalen Denkens dazu führt, dass die betreffenden SuS im Vergleich zu den SuS der Materialgruppe eher dazu ermutigt werden, die graphische Repräsentationsform zu nutzen. Auch scheinen sie ihren Fokus mehr auf Veränderung zu legen.



Im Gegensatz hierzu scheinen die SuS der Materialgruppe eher dazu zu neigen, die reale Situation mit einzubeziehen und den Zustand im Blick zu behalten.

### **Auswertung der Aufgabe *Rennwagen***

Die Aufgabe *Rennwagen* verlangt von den SuS die Zuordnung eines Weg-Geschwindigkeit-Graphen zu einer von fünf aus der Vogelperspektive abgebildeten Rennstrecken. Drei der Rennstrecken waren bezüglich der abgebildeten Kurven prinzipiell mögliche Lösungen, die ein Verständnis von Graph und Rennbahnen zeigten, zwei waren falsch. Es ergaben sich vier Kategorien. Zwei gaben Aufschluss über die zur Lösung der Aufgabe relevanten Aspekte: (1) korrektes Wissen über den Zusammenhang von Geschwindigkeit und Kurven (GK); (2) auf Grundlage des Graphen Erkennen, dass die Strecke verschiedene Kurventypen haben muss. Zwei Kategorien bezogen sich auf Schwierigkeiten: (3) Graph-als-Bild Fehler; (4) Fehlinterpretation der abgebildeten Rennstrecken. Mehrfachcodierung war möglich. Des Weiteren wurde unterschieden, ob die SuS auf Basis ihrer Begründung eine mögliche oder eine falsche Lösung gegeben hatten. Dies sollte Informationen darüber liefern, welche Aspekte Einfluss auf die korrekte Lösung hatten.

### *Ergebnisse zur Aufgabe *Rennwagen**

Die Interrater-Reliabilität für alle Kategorien liegt zwischen [0.804; 0.929]. Der Vergleich der Häufigkeiten zeigt, dass die korrekte Verknüpfung von Geschwindigkeit und Kurven in beiden Gruppen vergleichbar oft benannt wird ( $N_{\text{Sim}} = 17$ ,  $N_{\text{Mat}} = 19$ ). Allerdings ergibt sich ein Unterschied, inwiefern dieses Wissen auch zum Ziel führt: Im Vergleich zur Simulationsgruppe können signifikant mehr SuS aus der Materialgruppe ihr eigentlich korrektes Wissen über Geschwindigkeit und Kurven in diesem Setting *nicht* umsetzen und gelangen zu einer falschen Lösung ( $\chi^2 = 4.669$ ,  $p = 0.031^*$ , *Cramer's V* = 0.18). Von den betreffenden SuS der Materialgruppe ( $N = 11$ ) begehen vier den Graph-als-Bild Fehler, den keiner der betreffenden SuS aus der Simulationsgruppe ( $N = 3$ ) macht. Des Weiteren fällt auf, dass die Fähigkeit, aus dem Graphen die Erkenntnis ableiten zu können, dass es verschiedene Typen von Kurven auf der Strecke geben muss, bedeutend für die Lösung der Aufgabe ist. Von 22 SuS, die diesen Zusammenhang benennen, wählen 21 eine der möglichen Antworten, die ein Verständnis von Graph und Strecke zeigen.

## *Deutung*

Auch in diesem Fall liefern die Ergebnisse auf Grund kleiner Zahlen und Effektstärken lediglich Indizien. Diese deuten darauf hin, dass die Verwendung von Simulationen dazu führt, dass SuS das vorhandene und korrekte Alltagswissen, in diesem Fall über Geschwindigkeit und Kurven, besser mit der vorgegeben graphischen Repräsentation verknüpfen können, was sich in der geringeren Anzahl falscher Antworten und dem Nicht-Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers möglicherweise andeutet. Die Fähigkeit, den Graphen im Hinblick auf die unterschiedlichen Kurventypen korrekt zu deuten, scheint relevant für die Wahl einer möglichen Lösung. Obwohl sich kein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen zeigt, gelingt dies 14 SuS der Simulationsgruppe und nur 7 SuS der Materialgruppe. Die Fähigkeit, den Graphen korrekt zu interpretieren, ist daher gegebenenfalls in der Simulationsgruppe eher vorhanden.

## **Quantitative und qualitative Ergebnisse zusammenbringen**

Sowohl der Einsatz von gegenständlichen Materialien als auch von Computer-Simulationen hat einen positiven Einfluss auf das funktionale Denken. Beide Medien scheinen jedoch auf unterschiedliche Aspekte funktionalen Denkens zu wirken. Basierend auf den qualitativen Ergebnissen lässt sich vermuten, dass Materialien den Fokus der SuS auf die reale Situation und Zustände lenken. Eine Untersuchung des Zuwachses der Lösungsraten einzelner Aufgaben von Pre- zu Posttest gab Hinweise darauf, dass sich dies besonders auf das Verständnis von Punkten und damit eventuell auf das Verständnis des Zuordnungsaspekts auswirkt. Simulationen hingegen scheinen den Blick der SuS auf den Graphen zu lenken und den Aspekt der Änderung in den Vordergrund zu rücken. Dieser Fokus führt gegebenenfalls dazu, dass die SuS graphische Repräsentationsformen besser mit realen Situationen verknüpfen können, was möglicherweise als beginnendes Verständnis des Objekt-Aspekts und sicher als Fähigkeit zum Repräsentationswechsel gewertet werden kann.

## Implikationen

Beide Medien können und sollten zur Förderung des funktionalen Denkens eingesetzt werden. Mit Blick auf das von uns in dieser Studie fokussierte qualitative Verständnis funktionaler Zusammenhänge stellen sich Computer-Simulationen in der von uns verwendeten Art allerdings als Mittel der Wahl dar. Sie scheinen den Blick für qualitatives Änderungsverhalten und die Fähigkeit oder auch Bereitschaft, Graphen zu verwenden und diese mit realen Situationen zu verknüpfen, zu stärken. Die Verwendung von gegenständlichen Materialien sollte sich jedoch unweigerlich anschließen, um auch das quantitative Verständnis zu schulen. Für die Lehreraus- und -weiterbildung impliziert dies, dass es unumgänglich ist, zu vermitteln, wie entsprechende Simulationen mittels GeoGebra angemessen gestaltet und eingesetzt werden können. Nur dann sind unsere Ergebnisse für den Unterricht nutzbar zu machen.

## Literatur

- Barzel, B., & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. *PM*, 52(31), 14–19.
- Danckwerts, R., Vogel, D., & Maczey, D. (2000). Ein klassisches Problem – dynamisch visualisiert. *MNU*, 53(6), 342–346.
- Elschenbroich H.-J. (2011). Geometrie, Funktionen und dynamische Visualisierung. In T. Krohn (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik - mathematikdidaktische Ansätze. Festschrift für Wilfried Herget* (S. 69–84). Hildesheim: Franzbecker.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.
- Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *ml*. (141), 4-11.
- Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (10. Auflage). Weinheim: Beltz.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion*. Bern: Huber.
- Roth, J. (2008). Systematische Variation: Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *ml*. (146), 17–21.

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *JMD* (10), 3–37.
- Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. *MU*, 24(4), 90–101.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *ml*. (118), 4–8.

Adressen der Autoren:

Michaela Lichti  
Graduiertenkolleg „Unterrichtsprozesse“  
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau  
Thomas-Nast Str. 44  
76829 Landau  
[lichti@uni-landau.de](mailto:lichti@uni-landau.de)

Prof. Dr. Jürgen Roth  
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)  
Institut für Mathematik  
Fachbereich 7: Natur und Umweltwissenschaften  
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau  
Fortstr. 7  
76829 Landau  
[roth@uni-landau.de](mailto:roth@uni-landau.de)