

## **Bearbeitungsprozesse bei Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen – der Einfluss von gegenständlichen Materialien und Computer-Simulationen**

Das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern (SuS) der Jahrgangsstufe 6 lässt sich unter Verwendung von gegenständlichen Materialien und Computer-Simulationen fördern (Scheuring & Roth, 2017). Doch obwohl beide Medien einen signifikanten Zuwachs des funktionalen Denkens generieren, stellt sich der Zuwachs, der mittels Simulationen erzeugt wird, als deutlich größer dar. Es scheinen Unterschiede in der Art und Weise zu bestehen, wie beide Medien Einfluss auf das funktionale Denken nehmen. Um diese Unterschiede genauer in den Blick nehmen zu können, schien daher die Betrachtung von Prozessen beim funktionalen Denken angezeigt. Die im Folgenden vorgestellte Analyse von Bearbeitungsprozessen bei Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen unter Berücksichtigung des Einflusses von gegenständlichen Materialien und Computer-Simulationen wird darauf Antworten liefern.

### **1. Funktionales Denken**

Funktionales Denken kann einerseits mittels der Aspekte Zuordnung, Änderungsverhalten und Funktion als Objekt (Vollrath, 1989) beschrieben werden. Diese Aspekte werden auch als normative Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016), die sich aus fachdidaktischer Perspektive als notwendig für funktionales Denken darstellen, bezeichnet. Andererseits lässt sich auf das funktionale Denken von SuS schließen, wenn diese in der Lage sind, angemessen mit den Repräsentationsformen Tabelle, Graph, Formel und situative Beschreibung umzugehen und Repräsentationswechsel vorzunehmen (Nitsch, 2015).

### **2. Viele Gefäße und Rennwagen – eine qualitative Inhaltsanalyse**

Die Aufgaben *Viele Gefäße* und *Rennwagen* wurden im Rahmen einer Intervention zum funktionalen Denken bzw. im zugehörigen Nachtest in Jahrgangsstufe 6 eingesetzt. *Viele Gefäße* verlangt die Zuordnung von Abbildungen von Gefäßen (Fotos) zu den entsprechenden Füllgraphen, *Rennwagen* die Zuordnung einer von fünf Rennstrecken zum entsprechenden Geschwindigkeitsgraphen. In beiden Fällen muss eine abgebildete Situation (Fotos, abstrakte Darstellung der Rennstrecke aus der Vogelperspektive) mit der jeweiligen graphischen Repräsentation des zugrundeliegenden funktionalen Zusammenhangs zusammengebracht werden. Darüber hinaus mussten die

SuS ihre Zuordnung jeweils begründen. Diese Begründungen wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2008) untersucht, indem induktiv Kategorien gebildet und durch Experten bestätigt wurden. Es wurden Kategoriensysteme erstellt, unter deren Verwendung zwei Rater die Schülerbegründungen codierten. Einzelne Argumente konnte mit mehreren Kategorien versehen werden. Die Interrater-Reliabilität wurde mit Cohens Kappa ( $\kappa$ ) überprüft. Für die Aufgabe *Viele Gefäße* stellten sich die Kategorien (1) Form des Gefäßes ( $\kappa = .97$ ), (2) Verlauf des Graphen ( $\kappa = .87$ ), (3) Zustand ( $\kappa = .97$ ) und (4) Veränderung ( $\kappa = .93$ ) als relevant dar. Während (1) und (2) sich inhaltlich erschließen, hatten die SuS bei (3) einen Ist-Zustand im Blick (Der Graph *ist* steil.), bei (4) fokussierten sie eine Veränderung (Das Gefäß *wird nach oben hin* enger.) Für die Aufgabe *Rennwagen* waren die Kategorien (1) Geschwindigkeit und Kurven ( $\kappa = .92$ ), Geschwindigkeit ( $\kappa = .93$ ), Art der Kurven ( $\kappa = .87$ ) und (4) Graph-als-Bild-Fehler von Bedeutung. (1) umfasst dabei, dass die SuS mit ihrem Alltagswissen über den Zusammenhang von Kurven und Geschwindigkeit argumentierten (Ein Auto muss in Kurven langsamer fahren), die Kategorien (2) und (3) beschreiben, dass die SuS basierend auf dem Graphen mit Geschwindigkeit arbeiteten bzw. erkannten, dass die gesuchte Rennstrecke drei unterschiedlich geartete Kurven haben muss. (4) beinhaltet mit dem Graph-als-Bild-Fehler eine typische Fehlvorstellung. Es schloss sich ein Vergleich mittels Chi<sup>2</sup>-Test von Kategorienhäufigkeiten zwischen SuS an, die zur Förderung ihres funktionalen Denkens mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen gearbeitet hatten.

### 3. Ergebnisse und Hypothesen

Der Vergleich der Häufigkeiten der Kategorien der Aufgabe *Viele Gefäße* ergab, dass SuS der Materialgruppe signifikant häufiger mit der Form des Gefäßes ( $\chi^2 = 4.16, p = 0.04^*$ ) argumentierten und häufiger einen Zustand im Blick hatten ( $\chi^2 = 4.36, p = 0.04^*$ ). Die SuS der Simulationsgruppe hingegen verwendeten signifikant häufiger den Verlauf des Graphen ( $\chi^2 = 15.08, p < 0.001$ ) und fokussierten signifikant öfter eine Veränderung ( $\chi^2 = 6.95, p = 0.008^{**}$ ). Die Aufgabe *Rennwagen* zeigte durch den Vergleich der Kategorienhäufigkeiten, dass SuS der Materialgruppe signifikant häufiger trotz korrekter Bezugnahme auf ihr Alltagswissen über Kurven und Geschwindigkeit eine falsche Lösung wählten ( $p = 0.022^*$ ). Dies konnte sich in Problemen der SuS, den Graph angemessen zu interpretieren, oder in Schwierigkeiten mit der Darstellung der Rennstrecken begründen. Eine Betrachtung des Auftretens des Graph-als-Bild-Fehlers in dieser Schülergruppe zeigte, dass dieser hier vermehrt auftrat, sodass die Ursache für die Schwierigkeit, Alltagswissen mit der Aufgabe zusammenbringen zu können, im

Graphen vermutet wurde. Gleiches ergab sich auch für die Verwendung der Kategorie *Geschwindigkeit* ( $p = 0.042^*$ ). Hinsichtlich der Kategorie *Art der Kurven* wurde deutlich, dass das Erkennen der Notwendigkeit verschiedenartiger Kurven für eine angemessene Bearbeitung der Aufgabe besonders ausschlaggebend zu sein schien. Von 21 SuS, die mittels der Art der Kurven argumentierten, wählten 20 eine richtige Lösung. Ebenfalls bemerkenswert war das Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers. Dieser wurde in 104 von 227 Fällen identifiziert, obwohl die Aufgabe *Rennwagen* nach einer Intervention zur Förderung des funktionalen Denkens von den SuS bearbeitet wurde. Es zeigt sich sehr deutlich, dass der Graph-als-Bild-Fehler eine typische (Fehl)vorstellung ist, die den SuS intuitiv besonders nahe zu liegen scheint. Denn in Jahrgangsstufe 6 sind funktionale Zusammenhänge nicht explizit Thema des Mathematikunterrichts. Diese Befunde führten zu einer Reihe von Hypothesen bezüglich der Bearbeitungsprozesse bei Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen. Drei dieser Hypothesen nehmen die Aspekte nach Vollrath in den Blick. So wurde vermutet, dass (1) die Materialgruppe einen Vorteil hinsichtlich der Förderung des Verständnisses des Zuordnungsaspekts hatte, da diese SuS verstärkt mit Zuständen argumentierten. Dagegen schien die Simulationsgruppe einen Vorteil hinsichtlich der Förderung des Verständnisses von (2) Änderungsverhalten und (3) Funktion als Objekt zu haben. (2) ergab sich aus dem Fokus der Simulationsgruppe auf Veränderung und den Verlauf des Graphen, (3) durch die geringeren Schwierigkeiten, die die SuS mit der Verknüpfung von Situation und graphischer Repräsentation in der Aufgabe *Rennwagen* offenbarten.

#### **4. Hypothesen prüfen – der mittlere Zuwachs der Lösungsraten**

Um diese Hypothesen auf ihre Gültigkeit hin überprüfen zu können, wurden Daten aus Vor- und Nachtest, die die Effektivität der Intervention messen sollten, verwendet. Hierzu wurden die Zuwächse der mittleren Lösungsraten getrennt nach Material- und Simulationsgruppe hinsichtlich eines jeden Testitems betrachtet. Die Items wurden danach gruppiert, ob die Material- oder die Simulationsgruppe jeweils einen größeren Zuwachs der mittleren Lösungsrate erreicht hatte. Es fanden sich 9 Items für die Materialgruppe und 17 Items für die Simulationsgruppe. Diese verteilten sich hinsichtlich des Objektaspekts deutlich unterschiedlich zwischen den Gruppen: 2 Objekt-Items fanden sich in der Materialgruppe, 7 in der Simulationsgruppe. Dies wurde als weiterer Hinweis für Hypothese (3) gewertet. Es folgte eine Analyse der so gruppierten Items, um Gemeinsamkeiten zwischen ihnen herausarbeiten zu können, die das Erreichen eines größeren Zuwachses in der jeweiligen Gruppe erklären konnten. Es fiel auf, dass die 9 Items, die auf die Materialgruppe entfielen, sich häufig mit der Identifikation von Wertepaaren

auseinandersetzen und damit einen Vorteil der Gruppe hinsichtlich des Zuordnungsaspekts andeuteten. Die 17 Items der Simulationsgruppe hingegen beinhalteten verstärkt die Antizipation und den Vergleich von Steigungen bzw. Änderungsraten. Damit fanden sich Belege für die Hypothesen (1) und (2). Auch fiel auf, dass die Simulationsgruppe in allen Tabellenitems einen größeren Zuwachs erzielte. Eventuell hatte sie, da sie nur „klicken“ musste, mehr Kapazitäten frei, sich mit der Tabelle als Repräsentationsform auseinanderzusetzen. Dagegen erzielte die Materialgruppe in Items zum Würfelkontext, der ein räumliches Verständnis voraussetzte, einen größeren Zuwachs. Durch gegenständliche Materialien konnte diese Art des Verständnisses anscheinend besser gefördert werden.

## 5. Diskussion

Zusammenfassend muss man feststellen, dass gegenständliche Materialien und Computer-Simulationen in unterschiedlicher Weise Einfluss auf die Bearbeitungsprozesse bei Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen nehmen. Es ergeben sich Hinweise, dass sich mit Simulationen das Verständnis der Aspekte Änderungsverhalten und Funktion als Objekt, mit Materialien das Verständnis des Zuordnungsaspekts besser fördern lässt. Des Weiteren scheinen auch die Arbeit mit bestimmten Kontexten und der Umgang mit Repräsentationsformen von der Wahl des zur Förderung verwendeten Mediums abzuhängen. Eine umfassende Förderung des funktionalen Denkens sollte folglich sowohl das Arbeiten mit gegenständlichen Materialien als auch mit Computer-Simulationen einschließen, da sich beide Medien passgenau zu ergänzen scheinen.

## Literatur

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (10. Auflage). Weinheim: Beltz.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Scheuring, M. & Roth, J. (2017). Real materials or simulations? Searching for a way to foster functional thinking. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)*, S. 2678-2679.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*. (10), 3–37.