

JÜRGEN ROTH

Computer einsetzen: Wozu, wann, wer & wie?

LERNGRUPPE: 5.–13. Klasse

IDEE: Computereinsatz ist weder Selbstzweck noch selbstverständlich lernförderlich. Es kommt auf die Ziele des Einsatzes und dessen methodische Gestaltung an.

MATERIAL: GeoGebra-Book unter www.geogebra.org/m/Ax73wMeM

Der aktuellen Forderung nach einer stärkeren „Digitalisierung der Schule“ kann der Mathematikunterricht eigentlich recht gelassen entgegensehen: Tabellenkalkulationsprogramme, Computeralgebra-Systeme, Dynamische Geometrie-Systeme und, als Verschmelzung aus diesen drei entstanden, Dynamische Mathematik-Systeme (oder Multi-Repräsentations-Systeme, vgl. Barzel/Weigand 2008) haben im Laufe der Jahre Einzug gehalten.

Ob der Einsatz im Mathematikunterricht sinnvoll ist? – Diese pauschale Frage wird immer wieder kontrovers diskutiert und die Antworten gehen, abhängig von den persönlichen Einstellungen der handelnden Personen, in der Regel weit auseinander. Dabei müsste es vielmehr um diese konkreten Fragen gehen: Trägt der Rechnerinsatz etwas zum Erreichen der jeweils verfolgten Inhaltsziele des Unterrichts bei? Wozu genau soll er dienen?

Wenn die Frage nach dem Wozu geklärt ist – und damit auch die Frage, welches Programm eingesetzt werden soll, bleibt vor dem Einsatz noch zu bedenken: Wann soll der Rechner im Unterrichtsverlauf eingesetzt werden? Wer bedient ggf. den Computer und wie sollte die Nutzung methodisch ausgestaltet sein? Diese Fragen werden im Folgenden der Reihe nach diskutiert, obwohl sie natürlich nicht unabhängig voneinander zu beantworten sind.

Wozu? Grundsätzliche Ziele

Dynamische Mathematik-Systeme und die damit möglichen dynamischen Visualisierungen von Zusammenhängen können mit ganz unterschiedlichen Zielvorstellungen im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Hier sollen nur einige exemplarisch genannt werden (vgl. Roth 2008):

(1) *Beim experimentellen Arbeiten (Erkunden, Explorieren) kann der Rechnereinsatz Lernenden helfen, Zusammenhänge zu entdecken oder Ideen im Problemlöseprozess zu finden.*

Beispiel: Die Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck teilt das Quadrat über der Hypotenuse in zwei gleich große Flächen. – Stimmt das (immer)? Warum (nicht)? Mit dem Applet in **Abb. 1** lassen sich Voraussetzungen sowie die Behauptung des Satzes dynamisch variieren und Lösungsideen können entstehen.

(2) *Eine vorbereitete digitale Lernumgebung (insbes. in Form einer dynamischen Visualisierung) kann von Lernenden genutzt werden, um Problemlöseprozesse zu reflektieren.*

sehen Visualisierung) kann von Lernenden genutzt werden, um Problemlöseprozesse zu reflektieren.

Beispiel: In eine leere Badewanne wird 1 Minute lang Wasser mit 10 Litern pro Minute eingelassen, dann wird die Wasserzufuhr beendet und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, durch den 5 Liter pro Minute abfließen können. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen. Wie lässt sich aus der Zuflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge V in der Wanne zum Zeitpunkt t schließen? Nach der Bearbeitung dieses Problems kann mit dem Applet in **Abb. 2** – der Lösungsprozess reflektiert und dabei die Idee „Integrieren als Rekonstruieren“ erfasst werden.

(3) *Der Rechnereinsatz kann dazu beitragen, Verständnisgrundlagen für Begriffe und deren Eigenschaften zu bilden – wenn sich Lernende dies selbst erarbeiten oder die Lehrperson den Rechner zur Erklärung nutzt.*

Beispiel: Wer mit einem Tabellenkalkulationsprogramm die Ausflugskosten in Abhängigkeit von unterschiedlichen Teilnehmerzahlen oder

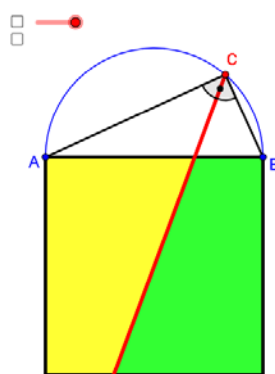


Abb. 1: Teilt die Winkelhalbierende des rechten Winkels in rechtwinkligen Dreiecken das Quadrat über der Hypotenuse in 2 inhaltsgleiche Flächen? (GeoGebra-Book)

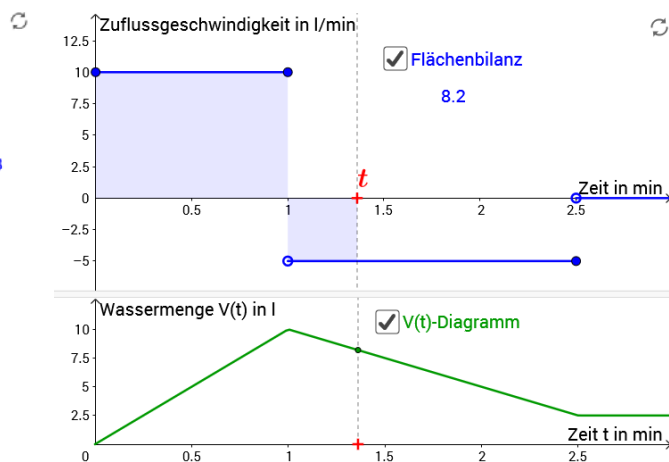


Abb. 2: Die eigene Lösung mit dem Rechner auf Plausibilität prüfen (GeoGebra-Book)

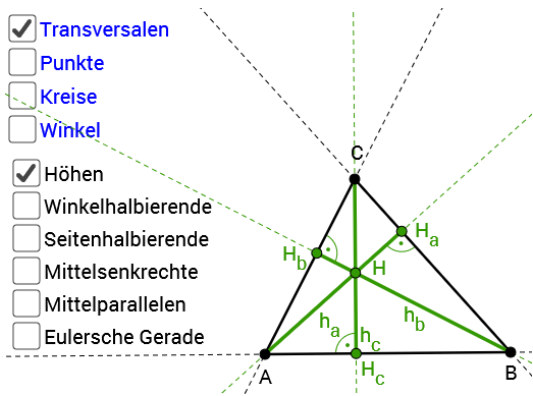


Abb. 3: Verständnisgrundlage für Begriffe am Dreieck zur Vertiefung (GeoGebra-Book)

Getränkepreisen berechnet, bekommt ein Gespür für abhängige und unabhängige Variablen.

Das Applet in **Abb. 3** ist als Verständnisgrundlage für Begriffe am Dreieck gedacht – es kann nach entsprechenden Erarbeitungsphasen zur Vertiefung genutzt werden. Durch Ziehen an einem Eckpunkt des Dreiecks kann beispielsweise erforscht werden, wie unterschiedliche Höhen in Abhängigkeit von der Dreiecksgrundform verlaufen können.

Grundsätzlich können mit Dynamischen Mathematik-Systemen (DMS) sehr einfach Repräsentationsformen wie Tabelle, Formel, Graph oder Figur miteinander vernetzt und wechselseitig als Erklärungshilfe genutzt werden.

(4) Wenn Schülerinnen und Schüler in Bezug auf Veränderungen mathematischer Situationen argumentieren, können insbesondere dynamische Visualisierungen dabei helfen, diese Argumente zu finden und zu kommunizieren.

Beispiel: Jeder Punkt P, der nicht auf der Achse a liegt, ist unterschiedlich weit von einem Punkt A und dessen Bildpunkt A' bei Achsenspiegelung an der Achse a entfernt. Diese Aussage lässt sich visuell unterstützt durch das Applet in **Abb. 4** leichter kommunizieren.

(5) Dynamische Visualisierungen unterstützen Lehrpersonen bei der Vermittlung der Grundideen von Argumentationen oder Beweisen.

Beispiel: Ausgangsfigur ist ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 cm. Jede Seite dieser Figur wird gedrittelt und im mittleren Drittel wird ein Quadrat aufgesetzt, dessen Kantenlänge $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge der bisherigen Seite der Fläche besitzt. Dieses Vorgehen wird bei der so entstandenen Fläche iteriert. Wie ändern sich dabei Form, Flächeninhalt und Umfang der Fläche? Durch das Applet in **Abb. 5** können Grundideen einer Grenzwertbildung entwickelt und unterstützt werden.

Applet-Einsatz beim funktionalen Denken: Forschungsergebnisse

Beim Umgang mit dynamischen Visualisierungen geht es, im Sinne des operativen Prinzips, oft darum, sich von der Frage „Was passiert mit ..., wenn ...?“ leiten zu lassen. Dabei können Änderungsmöglichkeiten durch systematische Variation ausgelotet und so auch Grenzfälle sowie Invarianten erfasst werden.

Wann: BYOD PC-Raum?

Aktuelle Forschungsergebnisse zeigen, dass das eigenständige Experimentieren von Lernenden mit gut strukturierten (GeoGebra-)Applets zu einem deutlich größeren Lernzuwachs im funktionalen Denken führt, als ein Experimentieren mit gegenständlichen Materialien an strukturgleichen Aufgaben (vgl. Scheuring/Roth 2017).

Der größere Lernzuwachs beim Arbeiten mit geeigneten Applets konnte auch im Vergleich zu Lernenden gezeigt werden, die ihr funktionales Denken anhand statischer Bilder grundlegend trainieren, indem sie die Veränderungen selbst in die Bilder hineinsehen (vgl. Rolfes u. a. 2016). Dies gilt insbesondere auch für Lernende, die bei mathematischen Aufgaben etwas ängstlich agieren. Offensichtlich eröffnen ihnen gut gestaltete Applets Handlungsoptionen, die ihre Ängstlichkeit bei der Bearbeitung von Aufgaben vermindert.

Was es bedeutet, gut strukturierte Applets zu gestalten, wird bei der Frage nach dem *Wie* ausgeführt.

Wann: BYOD PC-Raum?

Ist geklärt, wozu der Rechner eingesetzt werden soll, welche Inhalts- und Prozessziele also damit erreicht werden sollen, gilt es zu überlegen, wann ein guter Zeitpunkt dafür ist. Beim Blick auf das gängige Phasenschema für Unterrichtsstunden (Einstieg, Erarbeitung, Sicherung und Vertiefung) wird klar: Der Rechner lässt sich – abhängig vom gesetzten Ziel – grundsätzlich in jeder dieser Phasen sinnvoll einsetzen.

Wird mit Laptops, Tablets oder Smartphones gearbeitet, können Schülerinnen und Schüler den Rechneinsatz angemessen mit anderen Unterrichtsaktivitäten verbinden. Nicht in jeder Klasse sind diese Geräte im Klassensatz vorhanden – dann können auch im Sinne von bring your own device (BYOD) (vgl. Hammer/Schmidt 2015) schülereigene Geräte genutzt werden. Das ist oft einfacher zu organisieren (Rechtliche Hinweise dazu finden Sie im **Download-Bereich**). Durch Smartphones und die verfügbaren Smartphone-Apps von z. B. GeoGebra kann der

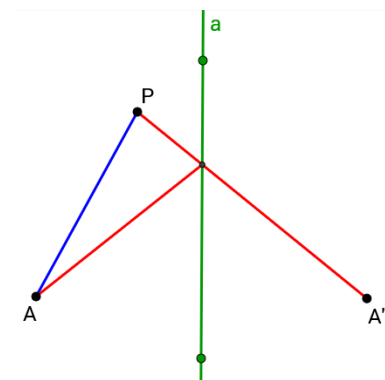


Abb. 4: Entfernung eines Punktes P zu einem Punkt A und dessen Bildpunkt A' bei Spiegelung an der Achse a (GeoGebra-Book)

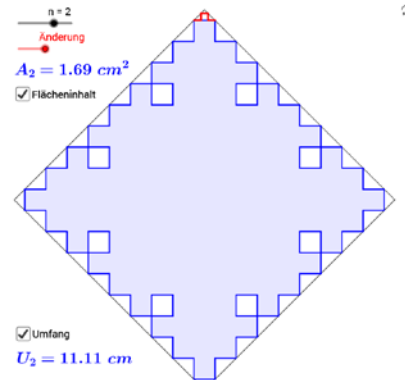


Abb. 5: Intuitiver Zugang zur Grenzwertbildung (GeoGebra-Book)

Rechner leicht passgenau zum Inhaltsziel eingesetzt werden.

Sollte diese Variante an den Rahmenbedingungen in der einen oder anderen Schule scheitern, ist – insbesondere für Erarbeitungs- und Vertiefungsphasen – die Nutzung eines Computerraums angezeigt, die wegen der Raumbuchung und der Konzeption der Stunden vor und nach dem Computerraumbesuch langfristig geplant werden muss. Im Computerraum selbst sollte dann in der Regel in Partnerarbeit und anhand klarer schriftlicher Arbeitsaufträge gearbeitet werden. Wichtig ist die gute Vor- und insbesondere auch Nachbereitung dieser Stunden.

Wer bedient den Rechner?

Auch die Frage, wer den Rechner bedient, also in welcher Sozialform (Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit oder Unterrichtsgespräch) er genutzt wird, ist nicht losgelöst von den zu erreichenden Zielen zu beantworten.

Geht es darum, Lernenden eine grundlegende mathematische Idee erstmalig zu vermitteln und vertraut zu machen, oder nach einer Erarbeitungsphase (in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit) die Ergebnisse zusammenzufassen und in Beziehung zur bestehenden Mathematik zu setzen, bietet sich das *Unterrichtsgespräch* an: Der Lehrer oder die Lehrerin bedient in

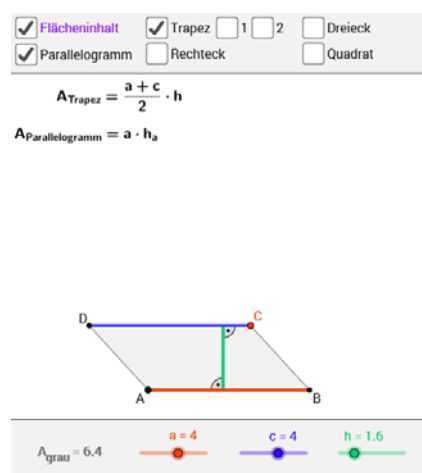


Abb. 6: Schieberegler und Kontrollkästchen dienen dem Ein- und Ausblenden bestimmter Aspekte. Die Lernenden können entdecken, dass ein Parallelogramm auch ein Trapez ist.

der Regel den Rechner bzw. die dynamische Visualisierung (Beamer o. Ä.). Die im Gespräch genannten Argumente können so dynamisch-visuell überprüft und unterstützt werden.

Das Applet sollte einerseits durch vorgegebene Fokussierungshilfen den Blick auf die wesentlichen Aspekte und Beziehungen lenken. Andererseits sollte es in dem Applet möglich sein, denkbare Schülerideen auch spontan visualisieren zu können. Das in **Abb. 6** abgebildete DMS-Applet (vgl. Roth 2013) enthält Schieberegler und Kontrollkästchen zum flexiblen Ein- und Ausblenden bestimmter Aspekte. Wird etwa die Länge der Seite c verändert und so das Viereck verformt, lässt sich entdecken, dass ein Parallelogramm auch ein Trapez ist. Über die Kontrollkästchen lässt sich die jeweils gewünschte Flächeninhaltsformel einblenden und das Unterrichtsgespräch auf die Frage lenken, warum beide Formeln hier zum selben Flächeninhalt führen.

Geht es darum, mathematische Zusammenhänge zu erforschen, sich Problemaufgaben probierend zu nähern, oder Begriffe und ihre Eigenschaften zu erkunden, dann bietet sich *experimentelles Arbeiten* an. Dieses kann in Einzelarbeit, Partnerarbeit oder Gruppenarbeit geschehen. *Einzelarbeit* hat den Vorteil, dass alle Lernenden nach ihren eigenen Interessen und Zugangsweisen sowie im eigenen Tempo arbeiten können. Was bei der Einzelarbeit fehlt, ist die Kommunikation, also der inhaltliche Austausch über die Vorgehensweisen und Erkenntnisse aus den Experimentierphasen, der zu einer vertieften Reflexion führen kann. (Im Sinne des Ich-Du-Wir-Prinzips kann das aufgefangen werden.) Für die Einzelarbeit muss zudem jeder über ein eigenes Gerät verfügen.

Wird in *Partnerarbeit* oder in *Gruppen* mit bis zu vier Lernenden gearbeitet, sollte jeweils nur ein Rechner pro Gruppe vorhanden sein, damit der intendierte Austausch und die vertiefte Auseinandersetzung mit den Applets auch wirklich funktionieren kann. Innerhalb der Gruppe sind klare Rollen hilfreich: Akteur (bedient den Rechner), Moderator (behält die Arbeitsaufträge im Blick), Schriftführer (Notation

der Vorgehensweisen und Ergebnisse) und ggf. Zeitwächter. Bei einer *Partnerarbeit* können die Rollen zusammengelegt werden: Akteur und Moderator. Bei längeren derartigen Arbeitsphasen sollten diese Rollen zwischendurch gewechselt werden.

Wie sollte der Einsatz gestaltet werden?

Wie gesagt: Soll das Arbeiten mit Computern inhaltlich gewinnbringend für den Mathematikunterricht sein, dann müssen das Applet und die ganze Lernumgebung methodisch gut gestaltet sein.

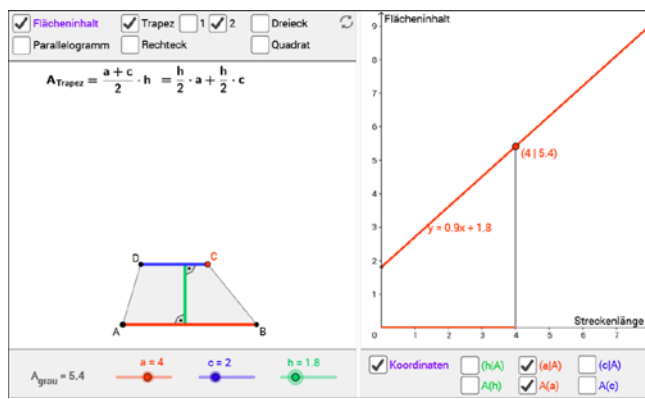
Fokussierungshilfen in digitalen Lernumgebungen

Damit die Lernenden die wesentlichen mathematischen Aspekte und Zusammenhänge im Blick haben und bei der Verknüpfung verschiedener Darstellungsformen unterstützt werden, ist es wichtig, die Aufmerksamkeit durch Fokussierungshilfen zu lenken. So ist es einfacher, sich auf Analyse- und Argumentationsprozesse zu konzentrieren.

Fokussierungshilfen können z.B. durch Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, unterstützende Hilfslinien u. Ä. gegeben werden. Im Applet in **Abb. 7** werden Bezüge zwischen den verschiedenen Darstellungen durch die Farbgebung hergestellt (z. B. in Rot: (1) Schieberegler zur Variation der Seite a ; (2) Seite a im Trapez; (3) für die Länge der Seite a stehender Wert auf der x -Achse). Die Größen, von denen der Flächeninhalt des Trapezes abhängt (hier die Längen der Seiten a und c sowie der Höhen h) wurden z. B. fett gesetzt.

Wenn Lernende erfahrener sind, kann man die Fokussierungshilfen in den Lernumgebungen schrittweise verringern. Letztlich ist das Ziel, dass die Lernenden die zu untersuchenden Situationen in einem Dynamischen Mathematik-System (DMS) komplett selbst erzeugen sowie Fokussierungshilfen selbstständig planen und setzen. Oder sie nutzen DMS zur Kontrolle ihrer vorher ohne Rechner angestellten Überlegungen. Eine sol-

Abb. 7: DMS-Applet zum Funktionalen Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Flächeninhalt eines Trapezes (vgl. Roth, 2013). (GeoGebra-Book)



che selbstständige Nutzung des Rechners ist das Ziel eines langfristigen, sich über mehrere Jahre erstreckenden Prozesses.

Art der Arbeitsaufträge

Wenn die Ziele klar und die entsprechenden Applets inhaltlich und visuell gut gestaltet sind, geht es darum, die Aufgaben so zu formulieren, dass wirklich ein selbstständiges Arbeiten der Schülerinnen und Schüler am Rechner stattfindet.

In jedem Fall sollen die Schülerinnen und Schüler vor dem Rechnereinsatz aufgefordert werden, sich gedanklich mit dem Problem oder der Situation auseinanderzusetzen und Vorhersagen bzgl. deren Veränderungen schriftlich festzuhalten – so kann das später mit dem Applet beobachtete Verhalten der Situation bei Änderungen damit verglichen werden. Dies kann in Form eines kurzen Textes geschehen, durch das Skizzieren eines passenden Funktionsgraphen oder durch das Angeben erwarteter Extremwerte des Bestandes sowie der Änderung usw. Wichtig ist, hier jeweils eine schriftliche Begründung einzufordern. Erst auf dieser Basis sollte mit dem Rechner gearbeitet werden.

Dieses Vorgehen führt einerseits zu einer Vorstrukturierung, die hilft, im Applet das Wesentliche zu erkennen. Andererseits hilft diese Vorarbeit dabei, am Rechner wirklich *systematische Variationen* vorzunehmen (Roth 2013). Systematische Variation bedeutet u. a. das bewusste Aufsuchen von Grenzfällen, um Möglichkeiten auszuloten und evtl. neue Erkenntnisse zu gewinnen. Die Lernenden steuern dabei also

die Stellen, zu denen sie Vorhersagen getroffen haben, bewusst an. Sie variieren die Situation um diese Stellen herum kleinräumig und langsam und schauen dabei genau hin.

Ein weiterer bewährter Aufgabentyp ist, die in einer angebotenen Repräsentation erkannten Aspekte in einer andere Repräsentation (z. B. zugehöriger Funktionsgraph) begründen zu lassen und umgekehrt (z. B. **Abb. 7**). Die dazu notwendigen vernetzten Reflexionen über Repräsentationen können – bei geeigneter Unterstützung durch Fokussierungshilfen – Verstehensprozesse vertiefen. Es hat sich als wesentlich herausgestellt, die Lernenden ihre Vorgehensweisen und Ergebnisse im Heft oder auf einem Arbeitsblatt schriftlich festhalten und letztere auch begründen zu lassen. Diese – bei Lernenden zunächst oft unbeliebte Tätigkeit – führt nachweislich zu einer intensiveren Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den erarbeiteten Inhalten. Bei der gemeinsamen Diskussion darüber, was nun wie festzuhalten ist, kommt es häufig zu neuen Erkenntnissen bei den beteiligten Schülerinnen und Schülern, die im Erarbeitungsprozess selbst noch gar nicht vorhanden waren (vgl. Roth u. a. 2016). Eine Möglichkeit der konsequenten Vernetzung von Applets mit schriftlichen Arbeitsaufträgen und weiteren Materialien, bieten etwa sogenannte Lernpfade (vgl. Roth 2014). Beispiele dazu und eine Anleitung zum Erstellen dieser Lernpfade in einem Wiki – einen Lernpfad bei dessen Bearbeitung man lernt, wie man einen Lernpfad erstellt – findet man unter <http://www.juergen-roth.de/lernpfade>.

Ganz entscheidend nach derartig selbstständigkeits-

orientierten Arbeitsphasen der Lernenden ist ein Zusammenführen der Schülerergebnisse und ein Vernetzen mit dem gesicherten mathematischen Wissen in einer Plenumsphase, die von der Lehrperson moderiert wird. Anregungen hierzu findet man im Beitrag von Christian Fahse in diesem Heft.

Fazit

Der Einsatz von Rechnern durch Schülerinnen und Schüler erfordert eine strukturierende methodische Rahmung, kann dann aber einen wesentlichen Beitrag zum Erreichen inhaltlicher Lernziele des Mathematikunterrichts leisten.

Literatur

- Barzel, B./Weigand, H.-G. (2008): Medien vernetzen. In: *mathematik lehren*, 146, S. 4–10
- Hammer, T./Schmidt, R. (2015): Bring your own device (BYOD) – Suche nach Extremwerten auf schülereigenen Geräten. In: *mathematik lehren*, 189, S. 30–35
- Rolfes, T./Roth, J./Schnotz, W. (2016): Dynamische Visualisierungen beim Lernen mathematischer Konzepte. – In: Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, Band 3. WTM-Verlag, Münster, S. 1481–1484.
- Roth, J. (2008): Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen. – In: Kortenkamp, U./Weigand, H.-G./Weth, T. (Hrsg.): *Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen an der Donau*, Hildesheim: Franzbecker, S. 131–138.
- Roth, J. (2013): Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. – In: *Wege zur Analysis, Sammelband mathematik lehren*. Seelze: Friedrich Verlag, S. 38–42.
- Roth, J. (2014): Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. – In: Roth, J./Süss-Stepancik, E./Wiesner, H. (Hrsg.): *Medienvielfalt im Mathematikunterricht – Lernpfade als Weg zum Ziel*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 3–25.
- Roth, J./Schumacher, S./Sitter, K. (2016): (Erarbeitungs-)Protokolle als Katalysatoren für Lernprozesse. – In: Grassmann, M./Möller, R. (Hrsg.): *Kinder herausfordern – Eine Festschrift für Renate Rasch*. Hildesheim: Franzbecker, S. 194–210.
- Scheuring, M./Roth, J. (2017): Computer-Simulationen oder gegenständliche Materialien – Was fördert funktionales Denken besser? – In: Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.