Rolf Oechsler (2013): Figurierte Zahlen – Von Figuren über Zahlen zu Termen
In: Der Mathematikunterricht, 59/5, 2013, S. 42-19

Rolf Oechsler

Figurierte Zahlen – Von Figuren über Zahlen zu Termen

„Warum bleibt die oft tot erklärte geometrische Anschauung so lebenskräftig, bisweilen sogar auf Gebieten, die, wie es scheint, nichts mit der Geometrie zu tun haben? Ich denke, weil geometrische Anschauung uns einen Weg zeigen kann zu dem, was wichtig, interessant und zugänglich ist, weil sie uns vor Irrwegen in die Wüste der Probleme, Ideen und Methoden warnen kann.“ (Freudenthal 1973, S. 47)

„Jedenfalls ist es gut, dass man bei unserem Thema [den Dreieckszahlen – Anm. d. Verf.] sowohl arithmetisch-algebraische als auch geometrische Zugänge und Nachweise finden kann. Wo Zahl und Form als die beiden Urquellen des Betreibens von Mathematik zusammenkommen, ist das Knüpfen von kumulationsstiftenden Netzen besonders einfach und ergiebig.“ (Schupp 2008, S. 14/15)

1. Terme und figurierte Zahlen

Terme mit Variablen und insbesondere Termumformungen werden häufig als ein schwieriges Thema von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 7 und 8 wahrgenommen. Die Einführung von Termen wird meistens anhand von Sachsituationen gestaltet und motiviert (z.B. ausgehend von Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen an Figuren und Körpern oder Strom- bzw. Handytarifen), das weitere Aufstellen und Umformen von Termen wird häufig losgelöst von realen Bezugssituationen oder Veranschaulichungsmöglichkeiten nur noch auf der formalen Ebene durchgeführt. Die damit einhergehende Einführung und Verwendung neuer Fachausdrücke (wertgleiche oder äquivalente Terme, gleichartige Glieder, Teilterme, Variablen, Koeffizienten, Zusammenfassen, Ausklammern und Ausmultiplizieren, binomische Formeln usw.) erschwert dabei das Verständnis und die Einsicht in die „Notwendigkeit von Termen zur Beschreibung und Verallgemeinerung von Sach- und funktionalen Zusammenhängen“ (García Mateos 2011).

Figurierte Zahlen stellen eine Möglichkeit dar, Terme enaktiv, ikonisch und symbolisch zu repräsentieren: durch das Legen oder Nachbilden von Figuren, das Zeichnen von Punktefeldern oder -mustern und das Notieren und Bearbeiten von Formeln zur Berechnung der Anzahl der Punkte in einem Muster. Die Untersuchung figurierter Zahlen gelingt im Rahmen einer Station eines Schülerlabors Mathematik[i] besonders gut, weil Schülerinnen und Schüler in einer solchen Lernumgebung weitgehend selbstständig arbeiten, zwischen den Repräsentationsformen wechseln und über den Einsatz der bereitgestellten Medien und Arbeitsmittel selbst entscheiden können. Die typische Arbeitsweise in Kleingruppen ermöglicht dabei Phasen des Ausprobierens sowie der Gruppendiskussion und Ergebnisreflexion[ii].

In einigen aktuellen Schulbüchern und insbesondere in älteren Schulbuchausgaben werden figurierte Zahlen häufig im Rahmen von Lesetexten oder mathematischen Exkursionen am Ende von Kapiteln zum Thema „Terme und Gleichungen“[iii] oder auch „Ebene Figuren“[iv] vorgestellt, u. a. auch im Zusammenhang mit dem Pascal-Dreieck. Andere neuere Schulbücher hingegen nutzen die vielfältigen Möglichkeiten, die die Verwendung und Untersuchung figurierter Zahlen im Zusammenhang mit dem Aufstellen und Umformen von Termen bieten, für eine motivierende, problemorientierte und schüleraktivierende Erarbeitung dieses Themenbereichs[v]. Unabhängig von den Einsatzmöglichkeiten ist die didaktische Intention dabei dieselbe, denn die Beschäftigung mit figurierten Zahlen als aufschlussreichen mathematischen Objekten zielt u. a. auf das Erforschen und Experimentieren, die Auseinandersetzung mit neuen mathematischen Fragestellungen, das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten auf spielerische Weise und den Wechsel zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationsformen.

Gerade unter dem Blickwinkel der von Hans Freudenthal im o.g. Zitat hervorgehobenen Bedeutung der geometrischen Anschauung bei der Behandlung mathematischer Inhalte eignen sich die figurierten Zahlen für eine Laborstation zum Thema „Aufstellen und Umformen von Termen“ besonders gut: Sie dienen einerseits der Veranschaulichung algebraischer Ausdrücke, sowohl im Rahmen von Computersimulationen als auch mit Hilfe gegenständlichen Arbeitsmaterials. Andererseits sind die figurierten Zahlen Beispiele rekursiv definierter Folgen und als solche „eigenständige Objekte mit zahlreichen interessanten Eigenschaften“ (Vollrath und Weigand, 2007, S. 197). Die didaktische Bedeutung von Folgen im Allgemeinen beschreiben Vollrath und Weigand weiter wie folgt:

- „Folgen sind *Hilfsmittel* beim Modellbilden. […]
- Die Beschäftigung mit den Folgen entwickelt wichtige *Arbeits- und Denkweisen* im Mathematikunterricht, wie etwa das schrittweise, iterative und rekursive Denken und Arbeiten. Dieses schrittweise diskrete Arbeiten ist handelnd nachvollziehbar und dadurch im Allgemeinen einfacher verständlich als der Umgang mit kontinuierlichen Objekten oder Verfahren.
- Folgen stellen in einem *problemlösenden Unterricht* ein breites Spektrum an Beispielen für die Entwicklung *kreativer Fähigkeiten* bereit. […]“ (Vollrath und Weigand, 2007, S. 197/198)

Die hier genannten Aspekte der Modellbildung, der Entwicklung wichtiger Arbeits- und Denkweisen und sowie kreativer Fähigkeiten stellen grundlegende Zielsetzungen der Arbeit in einem Schülerlabor Mathematik dar.

2. Vorstellung der Laborstation „Figurierte Zahlen“

Die in diesem Artikel vorgestellte Laborstation „Figurierte Zahlen“[vi] des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau ist für Schülerinnen und Schüler der Doppeljahrgangsstufe 7/8 konzipiert und umfasst, ausgehend von Untersuchungen an figurierten Zahlen, Problem- und Aufgabenstellungen zum Thema „Aufstellen und Umformen von Termen mit einer Variablen“. Die dazugehörigen Printmedien, Computersimulationen und Informationen zum Einsatz der Laborstation sind über die

Internetseite www.mathe-labor.de unter „Stationen“ und „Figurierte Zahlen“ online abrufbar bzw. stehen zum Download zur Verfügung.

2.1 Gliederung der Laborstation

Die Laborstation ist in drei aufeinander aufbauende Teile gegliedert:

- Teil 1: **Dreieckszahlen**
- Teil 2: **Quadrat- und Rechteckzahlen**
- Teil 3: **Sechseck- und Tetraederzahlen**

Die Auswahl und die Reihenfolge der Typen figurierter Zahlen beruht dabei auf folgenden Überlegungen: Als Einstieg in die Station verbinden die **Dreieckszahlen** in Teil 1 die Möglichkeit der einfachen und naheliegenden Konfiguration (als gleichseitige und als rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke) mit der Herausforderung, einen nicht unmittelbar erkennbaren Term zu ihrer Berechnung zu finden bzw. aufzustellen. In Abschnitt 2.3 wird dieser Teil der Laborstation exemplarisch dargestellt.

Die geometrischen Darstellungen der in Teil 2 betrachteten **Quadrat- und Rechteckzahlen** sind den Siebt- bzw. Achtklässlern hinreichend bekannt, ebenso wie die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte der entsprechenden Figuren. Dadurch kann in diesem Teil verstärkt auf die Vereinfachung von Summentermen mittels Termumformungen eingegangen werden, so dass die anschaulich leicht erkennbaren Zusammenhänge zwischen den Quadrat- und Rechteckzahlen einerseits und den Dreieckszahlen andererseits auch auf formal-symbolischer Ebene mit Hilfe von Termen und Termumformungen nachvollzogen werden können.

Die **Sechseckzahlen**, die in Teil 3 thematisiert werden, weisen eine zunächst ungewohnte figürliche Darstellung auf (vgl. Abb. 1). Zum Aufstellen äquivalenter Terme zu ihrer Berechnung wird dabei auf die Quadrat- und Rechteckzahlen zurückgegriffen, Beziehungen zu den Dreieckszahlen werden ebenfalls aufgezeigt. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler im letzten Teil der Laborstation Vorgehensweisen und Kenntnisse aus den beiden vorausgegangenen Stationsteilen aufgreifen und sich diese zunutze machen.

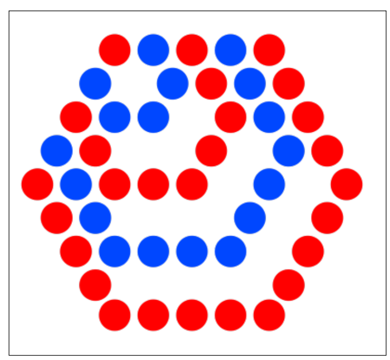


Abb. 1: Figur zur Sechseckzahl S_5

Durch die zum Abschluss der Laborstation eingeführten **Tetraederzahlen** werden schließlich die Einsatzmöglichkeiten des Arbeitsmaterials insofern ausgeschöpft, als sich die Gebilde zu ihrer geometrischen Veranschaulichung (dreiseitige Pyramiden) durch Aufeinanderschichten von Kugeln auf den Legebrettern konstruieren lassen (vgl. Abb. 2).

2.2 Arbeitsmaterial

Als Arbeitsmaterial stehen den Schülerinnen und Schülern Legebretter zur Verfügung, auf denen mit Holzkugeln in zwei Farben Figuren und Muster gelegt werden können. Die Legebretter sind beidseitig benutzbar: Auf der einen Seite des Bretts bilden Kugelmulden ein regelmäßig angeordnetes 10×10-Punkteraster, auf dem rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, Quadrate und Rechtecke zur Darstellung der entsprechenden figurierten Zahlen gelegt werden können. Auf der anderen Seite des Bretts sind Kugelmulden in zueinander versetzten Reihen angeordnet und ermöglichen das Legen von gleichseitigen Dreiecken, Sechsecken und Tetraedern, ebenfalls zur Veranschaulichung der jeweiligen figurierten Zahlen (vgl. Abb. 2).

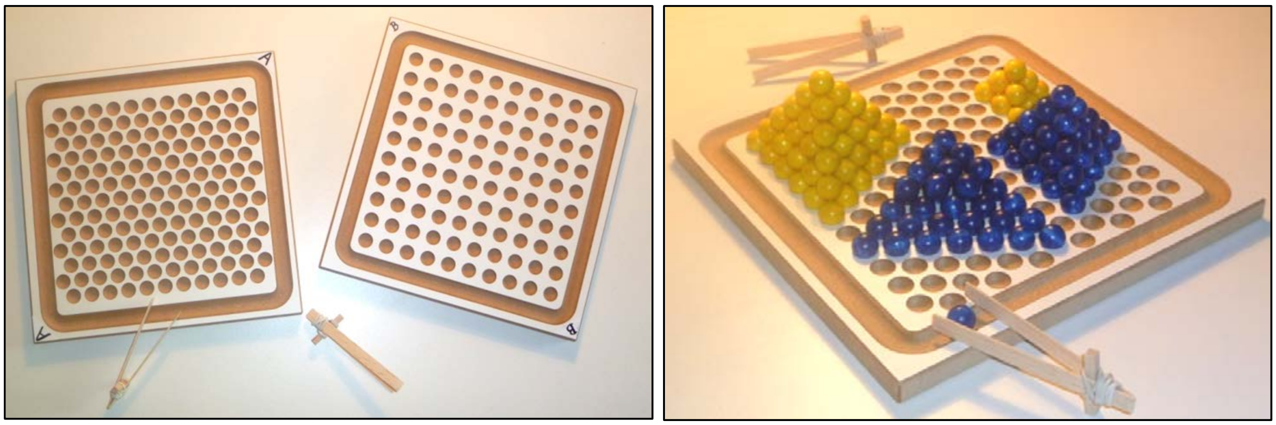


Abb. 2: Legebretter mit zwei Seiten, Pinzetten zum Greifen der Holzkugeln (links); Konfiguration von Tetraederzahlen (rechts)

2.3 Dreieckszahlen und Terme

Als Einstieg in die Erkundung figurierter Zahlen wird den Schülerinnen und Schülern ein Bild aus der Werkreihe „Alles ist Zahl“ des Schweizer Künstlers Eugen Jost zur näheren Betrachtung vorgelegt, in dem Ziffern, geometrische Formen und andere mathematischen Symbole in einem farbenfrohen Gesamtarrangement präsentiert werden. An einigen Stellen sind Figuren und Figurenfolgen von quadratisch bzw. dreieckig angeordneten Kreisen oder Punkten zu erkennen, die den Auftakt für die Untersuchung von Dreieckszahlen bilden.

Im nächsten Schritt geht es um die handelnd-aktive Nachbildung der Figurenfolge der Dreieckszahlen, die mit Hilfe der Kugeln in zwei Farben auf der entsprechenden Seite der Legebretter leicht und in optisch ansprechender Weise vollzogen werden kann (vgl. Abb. 3). In einem nächsten Schritt werden die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, diese Figurenfolge abzuzeichnen, die Anzahl der Kugeln bzw. Kreise unter den Figuren zu notieren und die Folge um weitere Glieder fortzusetzen.

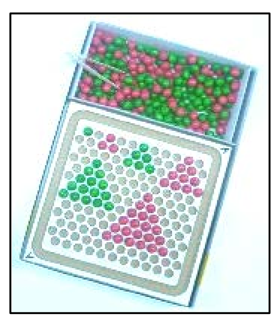


Abb. 3: Figurierte Dreieckszahlen

Mit Hilfe des regelmäßigen Zuwachses von einer Dreieckszahl zur nächsten geht die Darstellung von der ikonischen zur symbolischen Ebene über. Die folgende Abbildung einer entsprechenden Schülerbearbeitung verdeutlicht diesen Übergang durch die Wahl der Notationsform besonders treffend (vgl. Abb. 4).

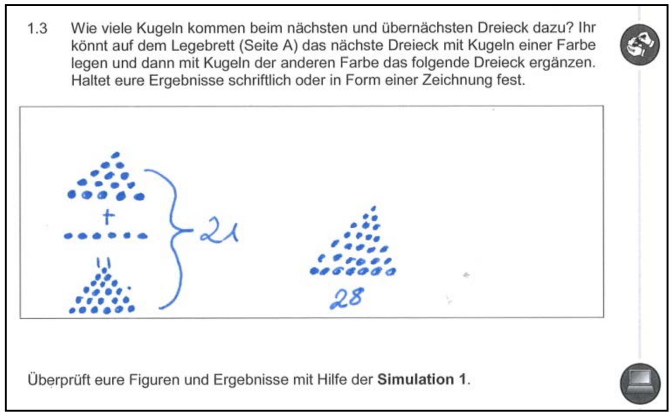


Abb. 4*:* Schülerdarstellung von Dreieckszahlen

Das sukzessive „Wachsen“ der Figuren, also der Anzahlen der zum Legen verwendeten Kugeln, wird in eine Tabelle eingetragen, in der auch auf die Veränderungen von einer Dreieckszahl zur nächsten aufmerksam gemacht wird (vgl. Abb. 5).

Bezeichnung	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	
Dreieckszahl	1	3	6	10				
Veränderung	+2	+3						

Abb. 5: Tabelle zum Eintragen von Dreieckszahlen

Die Tatsache, dass man eine Dreieckszahl durch Addieren der entsprechenden natürlichen Zahl zur vorausgegangenen Zahl gewinnt, lässt sich entweder verbal beschreiben oder prägnant als mathematische Formel formulieren, etwa für die 10. Dreieckszahl als $D_{10} = D_9 + 10$. In der entsprechenden Aufgabenstellung wird bewusst nach der Bildungsweise von D_{10} gefragt, um in der obigen, nach rechts „offenen“ Tabelle in Abb. 5 das iterative Verfahren zur Bestimmung der Dreieckszahlen hervorzuheben und gleichzeitig darauf hinzuweisen, dass es zeitraubend und umständlich ist, eine bestimmte Dreieckszahl immer wieder mit Hilfe vorheriger Dreieckszahlen zu berechnen (vgl. Abb. 6).

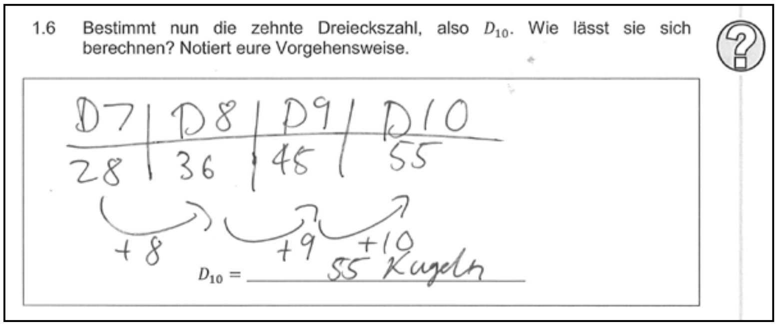


Abb. 6: Schülerdokument zur rekursiven Bestimmung der Dreieckszahl D_{10}

Deshalb wird an dieser Stelle das Aufstellen eines Terms zur allgemeinen Berechnung einer Dreieckszahl D_n und damit gleichzeitig die Einführung einer Variablen *n* für eine *beliebige*, also die *n-te* Dreieckszahl angeregt. Zur Vorbereitung der visuellen Demonstration der Formel

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

durch ein Rechteck ist es zunächst erforderlich, anstelle der gleichseitigen oder -schenkligen nun rechtwinklige Dreiecksformen zu wählen. Die entsprechende Veränderung kann mit Hilfe einer Computersimulation dynamisch nachvollzogen werden (vgl. Abb. 7).

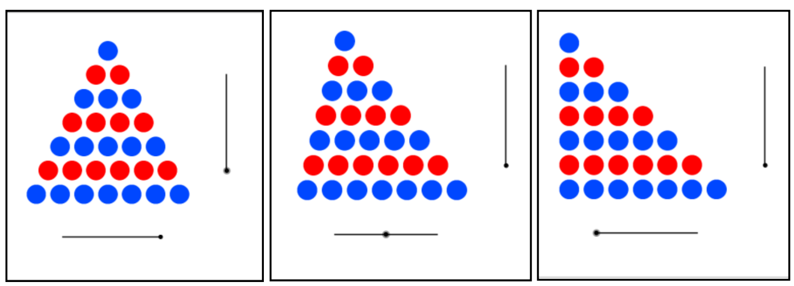
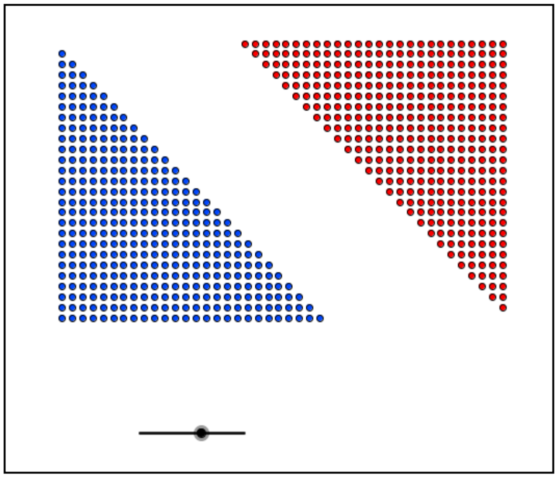


Abb. 7: Dynamische Veränderung der Dreiecksform

Mit dieser Simulation können, durch Betätigung des entsprechenden (vertikalen) Schiebereglers, verschiedene Dreieckszahlen erzeugt und bildlich dargestellt werden. Mit Hilfe des zweiten (horizontalen) Schiebereglers kann die Anordnung der Reihen graduell verändert werden, bis schließlich die gewünschte rechtwinklige Figur entstanden ist. Die sich daran anschließende Idee der Verdopplung einer Dreieckszahl zur Herleitung eines Terms zu ihrer Beschreibung wird ebenfalls mit Hilfe einer Simulation verdeutlicht (vgl. Abb. 8).



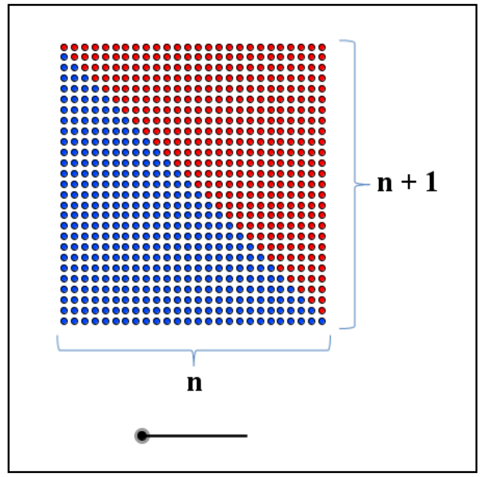
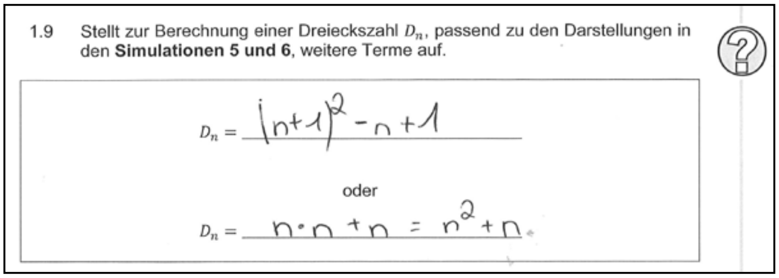


Abb. 8: Visuelle Unterstützung zum Aufstellen eines Terms zur Berechnung einer beliebigen Dreieckszahl D_n

Die Bildung eines Rechtecks wird hier als „Zusammenschieben“ zweier entsprechend gelagerter Darstellungen der Dreieckszahl D_n visualisiert. In dieser Simulation wird bewusst die Darstellung einer größeren, nicht näher bestimmten Dreieckszahl zugrunde gelegt, um ein bloßes Abzählen der Punkte bzw. Kreise zu verhindern oder zumindest zu erschweren und die Bildung eines Terms zur Berechnung einer beliebigen Dreieckszahl mit Hilfe der „Seitenlängen“ n und $(n+1)$ des entstehenden Rechtecks nahe zu legen.

Ein weiterer Vorteil der Computersimulation liegt dabei auf der Hand: Während das Legen entsprechender Figuren auf zwei Legebrettern, gerade im Rahmen einer Partner- oder Gruppenarbeitsphase, durchaus praktikabel und sinnvoll ist, stößt der Einsatz des realen Mediums an seine natürliche Grenze genau dann, wenn die Kanten der Legebretter zur Berührung kommen. An dieser Stelle müssten die Kugeln des einen Legebrettes umständlich auf das andere umgelagert werden, die Einsicht in das Zustandekommen eines rechteckigen Rasters wird zumindest verzögert, wenn nicht gar verhindert. Diese natürliche Hürde wird durch die Computersimulation überwunden, sie erlaubt damit die Konzentration auf einen wesentlichen Schritt hin zur Anbahnung der algebraischen Darstellung eines Sachverhaltes (hier der Bestimmung der n-ten Dreieckszahl).

Das Aufstellen äquivalenter Terme zur Bestimmung von Dreieckszahlen legen weitere Simulationen nahe, in denen als Ausgangsfiguren quadratische Punkteraster der Länge n bzw. $(n+1)$ gewählt werden (vgl. Abb. 9).


1.9 Stellt zur Berechnung einer Dreieckszahl D_n, passend zu den Darstellungen in den **Simulationen 5 und 6**, weitere Terme auf.

$D_n = |n+1)^2 - n + 1$

oder

$D_n = n \cdot n + n = n^2 + n$

Abb. 9: Terme zur Berechnung der Dreieckszahl D_n; im oberen Term dieser Schülerbearbeitung fehlt die Klammer um den Ausdruck $n + 1$

Die Terme können nach Betrachten der Simulationen unter die entsprechenden Abbildungen im Arbeitsheft eingetragen und anschließend miteinander verglichen werden (vgl. Abb. 10).

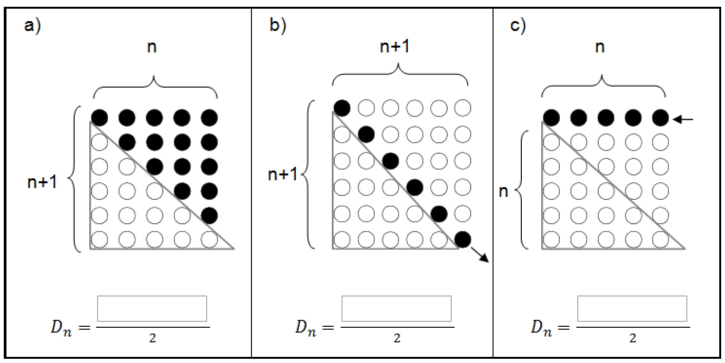
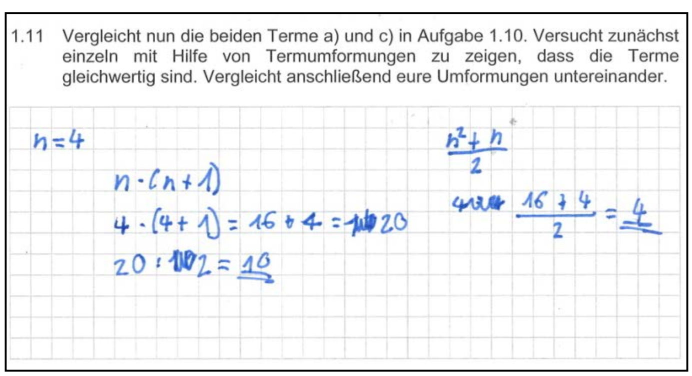


Abb. 10: Figuren zum Aufstellen unterschiedlicher Terme zur Berechnung von D_n

Die Termumformungen, die notwendig sind, um von der einen Termdarstellung zur anderen zu gelangen, können sicherlich nicht immer von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler an dieser Stelle geleistet werden. Es kommen auch andere Strategien zum Einsatz, wie z. B. das Einsetzen von Werten für die Variable, um die Äquivalenz zweier Terme „nachzuweisen“ (vgl. Abb. 11).


1.11 Vergleicht nun die beiden Terme a) und c) in Aufgabe 1.10. Versucht zunächst einzeln mit Hilfe von Termumformungen zu zeigen, dass die Terme gleichwertig sind. Vergleicht anschließend eure Umformungen untereinander.

$n = 4$

$n \cdot (n+1)$

$4 \cdot (4+1) = 16 + 4 = 20$

$20 : 2 = \underline{10}$

$\frac{n^2 + n}{2}$

$\frac{16 + 4}{2} = \underline{4}$

Abb. 11: Einsetzen von Werten anstelle von Termumformungen als Nachweis für die Äquivalenz von Termen

Das Hilfeheft, das auf jedem Gruppentisch ausliegt und je nach Bedarf verwendet werden kann, bietet eine Reihe von gestuften Hilfestellungen an, um diese Umformungen anzuregen bzw. auch formal durchführen zu können (vgl. Abb. 12).

Aufgabe 1.12

Der Term aus Aufgabe 1.10 b)

$$D_n = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$$

kann folgendermaßen vereinfacht werden:

- erste Klammer: 1. binomische Formel
- zweite Klammer: Klammerregel
  (*Minuszeichen vor der Klammer beachten!*)

Aufgabe 1.12 (Fortsetzung)

1. binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Klammerregel:

$$a - (b+c) = a - b - c$$

Abb. 12: Beispiele gestufter Hilfestellungen zum Vereinfachen eines Terms zur Berechnung der Dreieckszahl D_n

Verfolgt man die Zielsetzung, auch die Termumformungen auf den Legebrettern bzw. mit Hilfe von Punktemustern und ihrer Umstrukturierung zu veranschaulichen, so tritt das Problem auf, dass sich die Umformungen zwar visualisieren ließen, diese möglichen Veranschaulichungen jedoch keineswegs eine Unterstützung für die jeweilige Umformung darstellen. Im Gegenteil: Sie scheinen aufgrund ihrer Komplexität dem Ziel der Termvereinfachung zu widersprechen. Nicht jede Umformung sollte daher geometrisch veranschaulicht werden. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler z. B. erkannt hat, dass die unterschiedlich strukturierten Ausgangsfiguren in Abb. 10 zu (auf den ersten Blick) unterschiedlichen Termen führen, diese jedoch stets dieselbe (jeweils dreieckig eingerahmte) Teilfigur beschreiben, so wird sich der Nachweis der Äquivalenz der betreffenden Terme mittels Termumformungen auch auf der formal-symbolischen Ebene leichter einfordern lassen.

Es sei an dieser Stelle der Hinweis auf einen Vorteil der Betrachtung figurierter Zahlen gegenüber anderen Kontextsituationen zum Aufstellen von Termen mit (einer) Variablen erlaubt: Der dabei häufig favorisierte Ansatz der Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen an Figuren mit „unbekannten" Seitenlängen (etwa im Zusammenhang mit Grundstücksabmessungen) wird von vielen Schülerinnen und Schülern zu Recht als konstruiert und wenig realitätsbezogen empfunden. Warum auch sollten konkrete Grundstücke oder Grundstücksteile mit Hilfe von Variablen beschrieben werden, wenn doch in der Regel die genauen Maße eine wichtige Rolle spielen (z.B. in einer, wenn auch nur fiktiven, Kauf- bzw. Verkaufssituation)? Die Betrachtung der Folge der Dreieckszahlen hingegen suggeriert von

Anfang an ein gleichmäßiges unbegrenztes Anwachsen und legt die Einführung und Verwendung einer Variablen zur adäquaten Handhabung der Vorstellung einer „beliebigen“ Stelle oder Figur nahe, die es zu bestimmen gilt.

Literatur:

Baum, Sabine; Roth, Jürgen; Oechsler, Rolf (2013): Schülerlabore Mathematik – Außerschulische Lernorte zum intentionalen mathematischen Lernen. Der Mathematikunterricht, Heft 5, 2013

Freudenthal, Hans (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1. Stuttgart, Ernst Klett Verlag

García Mateos, Manuel (2011): *Enaktive Zugänge zu Termen mit Streichhölzern und Wendeplättchen in Klasse 8*. Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, 64/7, S. 397 – 401

Roth, Jürgen (2013): Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. Der Mathematikunterricht, Heft 5, 2013

Schupp, Hans (2008): *Dreieckszahlen – Oder: Wenn Form und Zahl zusammenkommen*. Der Mathematikunterricht, Heft 4, S. 4 – 21

Vollrath, Hans-Joachim; Weigand, Hans-Georg (2007): *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

---

[i] Vgl. dazu die im Artikel „Schülerlabor Mathematik – Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen“ in diesem Heft vorgeschlagene Definition.
[ii] Vgl. dazu den Artikel „Mathematik-Labor ‚Mathe ist mehr‘ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen“ von Jürgen Roth in diesem Heft.
[iii] Vgl. Lambacher-Schweitzer 7. Ernst Klett Verlag, 2002, S. 183
[iv] Vgl. Mathematik – Allgemeine Ausgabe für die Sekundarstufe – Schülerband 7. Westermann Verlag, 2006, S. 172/73
[v] Vgl. MatheNetz 7 – Ausgabe N. Westermann-Verlag, 2006, S. 30 ff.; Das Mathematikbuch 8. Ernst Klett Verlag, 2012, S. 8/9
[vi] Die Laborstation „Figurierte Zahlen“ und alle dazugehörigen Print-Materialien stehen unter www.mathe-labor.de online zur Verfügung.