



# Geometrie

Homepage zur Veranstaltung: <http://www.juergen-roth.de> ▶ Lehre ▶ Geometrie

## Geometrie

- 0 Geometrie!?
- 1 Axiome der Elementargeometrie
- 2 Kongruenzabbildungen**
- 3 Längen-, Winkel- und Flächenmessungen
- 4 Elementare Anwendungen
- 5 Ähnlichkeitsabbildungen



Geometrie

# **Kapitel 2:** **Kongruenzabbildungen**

## **Kapitel 2:** **Kongruenzabbildungen**

- 2.1 Gruppe der Kongruenzabbildungen
- 2.2 Kongruenz von Winkeln und Dreiecken
- 2.3 Gleichsinnige und nicht gleichsinnige Kongruenzabbildungen – Orientierung
- 2.4 Kleinerrelation und Addition für Längen und Winkelgrößen
- 2.5 Typen von Kongruenzabbildungen
- 2.6 Punktspiegelung (Halbdrehung)
- 2.7 Drehung
- 2.8 Parallelverschiebung
- 2.9 Schubspiegelung



Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.1 Gruppe der Kongruenzabbildungen

## Definition 2.1

- ▶ Eine Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich, die *geraden- und streckentreu* ist, heißt **längentreue** Abbildung.

## Definition 2.2

- ▶ Eine *längentreue* Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt **Kongruenzabbildung**.

## Satz 2.1

- ▶ Eine **Kongruenzabbildung**  $\varphi: \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  der Ebene  $\varepsilon$  auf sich ist durch drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  und deren Bilder  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$  eindeutig bestimmt.

## Satz 2.2

▶ Eine Kongruenzabbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich mit drei nicht kollinearen Fixpunkten ist die Identität  $id_\varepsilon$  auf  $\varepsilon$ .

## ▶ Beweis

- (1) Die Identität  $id_\varepsilon$  ist eine geraden- und streckentreue Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich.
- (2) Jeder Punkt  $P$  der Ebene  $\varepsilon$  ist Fixpunkt von  $id_\varepsilon$ .
- (3) Nach **(I<sub>3</sub>)** enthält die Ebene  $\varepsilon$  nichtkollineare Punkte  $P, Q, R$ .
- (4) Nach (1), (2) und (3) ist  $id_\varepsilon$  eine Kongruenzabbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich mit drei nicht kollinearen Fixpunkten und nach **Satz 2.1** ist  $id_\varepsilon$  die einzige Kongruenzabbildung mit dieser Eigenschaft.

#

## Satz 2.3

- ▷ Wenn  $A \neq B$  und  $[AB] \cong [A'B']$  ist, dann gibt es genau zwei Kongruenzabbildungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Ebene  $\varepsilon$  auf sich, die  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abbilden und die sich nur durch eine Achsenspiegelung an der Geraden  $g' = A'B'$  unterscheiden, d. h. es gilt:
- $$\varphi_2 = S_{g'} \circ \varphi_1$$

## ▶ Beweis

- ▷ Zunächst ist die *Existenz* von Abbildungen zu zeigen, die unter den Voraussetzungen  $A \neq B$  und  $[AB] \cong [A'B']$  den Punkt  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abbilden.
1. Fall:  $A = A' \wedge B = B'$ : Hier leisten  $id_\varepsilon$  und  $S_{AB}$  das gewünschte.
  2. Fall: O.B.d.A.  $A \neq A' \wedge B = B'$ : Hier leistet die Spiegelung an der Mittelsenkrechten  $m = m_{[AA']}$  von  $[AA']$  das gewünschte.
    - $S_m(A) = A'$
    - Wegen Satz 1.13 und  $[AB'] \cong [A'B']$  gilt:  $B = B' \in m$

### 3. Fall: $A \neq A' \wedge B \neq B'$ :

Zunächst Spiegelung an der Mittelsenkrechten  $m = m_{[AA']}$  von  $[AA']$ . Man erhält:

- $S_m(A) = A' \wedge S_m(B) = B^*$

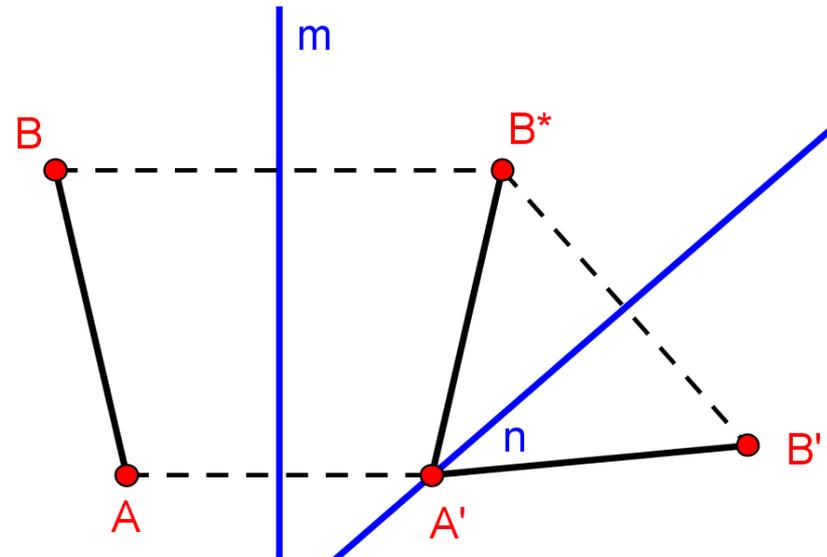
Gilt  $B^* \neq B'$ , dann spiegelt man an der Mittelsenkrechten

$n = m_{[B^*B']}$  von  $[B^*B']$ . Man erhält:

- $S_n(B^*) = B'$
- $S_n(A') = A'$ , da wegen  $[A'B^*] \cong [A'B']$  nach Satz 1.13 der Punkt  $A'$  auf  $n$  liegt.

Durch die Verkettung  $\varphi_1 = S_n \circ S_m$  wird also  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abgebildet.

Mit  $\varphi_1$  gilt das aber auch für  $S_{g'} \circ \varphi_1$ , denn die Spiegelung an  $g' = A'B'$  lässt die Punkte  $A'$  und  $B'$  fest und  $S_{g'} \circ \varphi_1 \neq \varphi_1$ , weil  $S_{g'}$  nicht die Identität auf  $\varepsilon$  ist.



## ► Beweis zu Satz 2.3 (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass es höchstens zwei solche Abbildungen geben kann.

- Es sei  $C \notin AB$  gegeben, mit  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$ ,  $\varphi(C) = C'$ , dadurch ist nach Satz 2.1 die Abbildung  $\varphi$  eindeutig festgelegt.
- Es kann nur noch einen weiteren Punkt  $C''$  geben, für den die durch die Längentreue vorgegebenen Kongruenzen  $[A'C''] \cong [A'C'] \cong [AC]$  und  $[B'C''] \cong [B'C'] \cong [BC]$  gelten.
- Die beiden gefundenen Bewegungen sind also auch die einzigen längentreuen Abbildungen der Ebene  $\varepsilon$  auf sich, die  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abbilden. #

## ► Folgerung

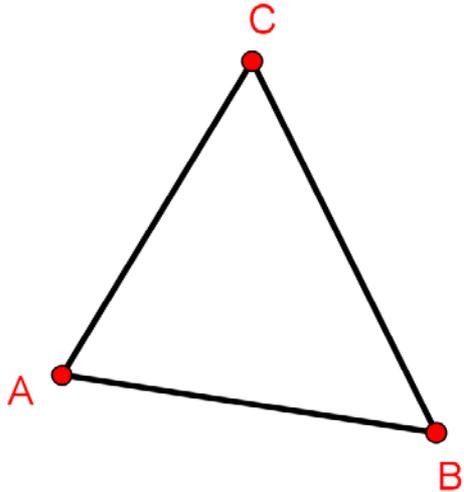
- Eine Halbgerade  $[AB$  kann immer mit Hilfe von höchstens zwei Geradenspiegelungen auf eine gegebene andere Halbgerade  $[A'B'$  abgebildet werden.

## Satz 2.4: Dreispiegelungssatz

▶ Jede Kongruenzabbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Geradenspiegelungen.

### ▶ Beweis

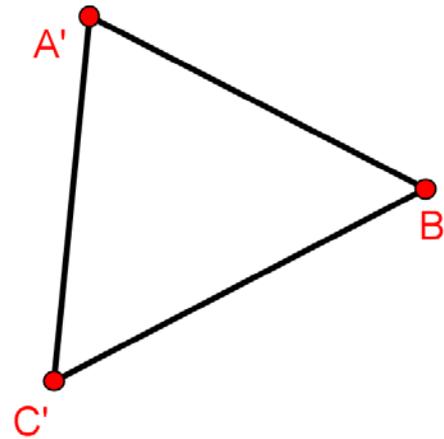
- (1) Gemäß Satz 2.1 wird ein Dreieck  $ABC$  und sein Bild  $A'B'C'$  bei einer längentreuen Abbildung  $\varphi$  betrachtet. Es gilt also  $A, B, C$  nicht kollinear und  $[A'C'] \cong [AC]$ ,  $[A'B'] \cong [AB]$ ,  $[B'C'] \cong [BC]$ .
- (2) Nach Satz 2.3 gibt es genau zwei Kongruenzabbildungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , die  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  so abbilden, dass  $[A'B'] \cong [AB]$  gilt. Diese beiden Abbildungen unterscheiden sich außerdem nur um die Geradenspiegelung an  $g' = A'B'$ .
- (3) Durch  $\varphi(C) = C'$  ist nach Satz 2.1 die Kongruenzabbildung  $\varphi$  eindeutig bestimmt. Also gilt entweder  $\varphi = \varphi_1$  oder  $\varphi = \varphi_2 = S_{g'} \circ \varphi_1$ .
- (4) Da sich  $\varphi_1$  als Verkettung von höchstens zwei Achsenspiegelungen darstellen lässt, ist  $\varphi$  eine Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen. #

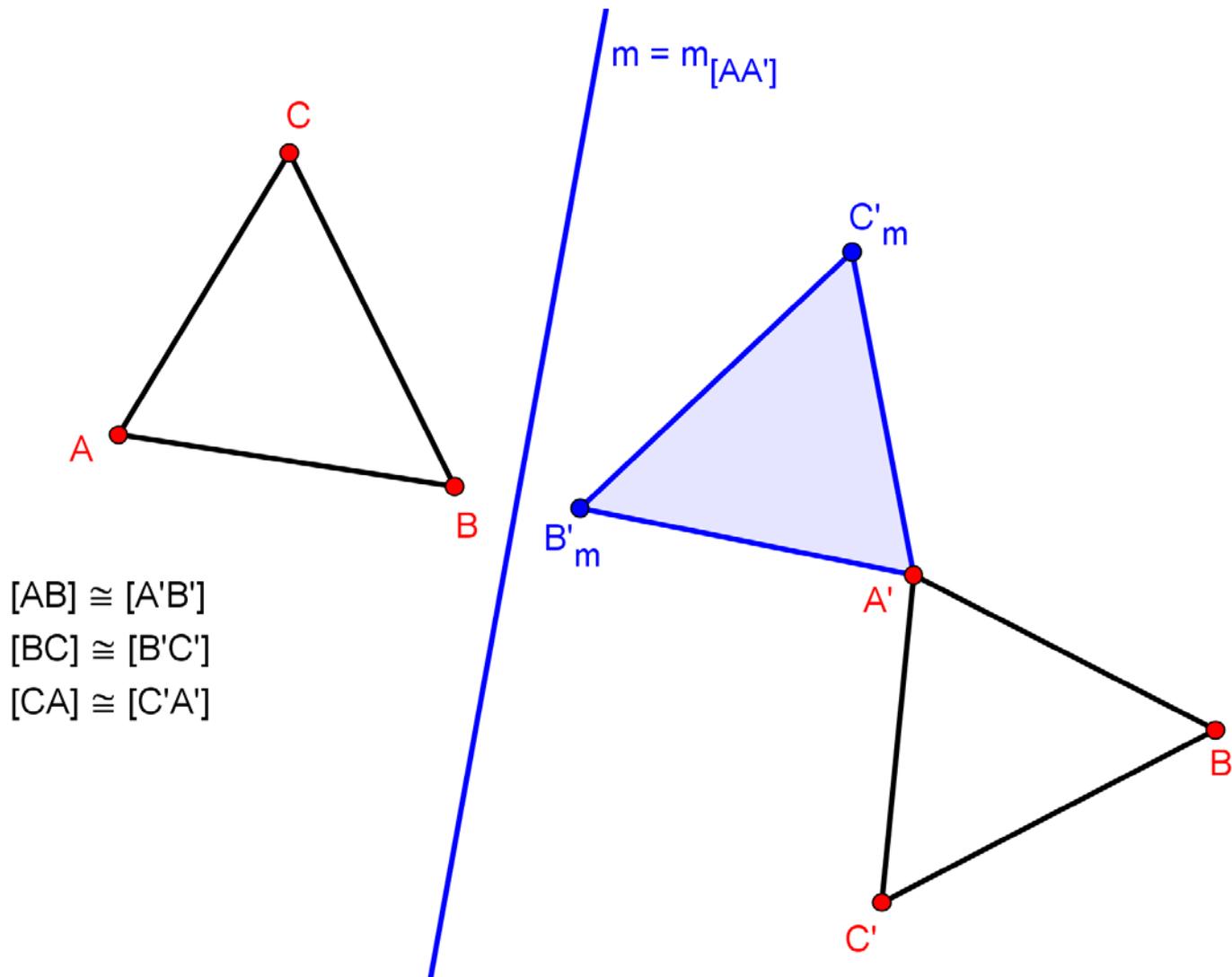


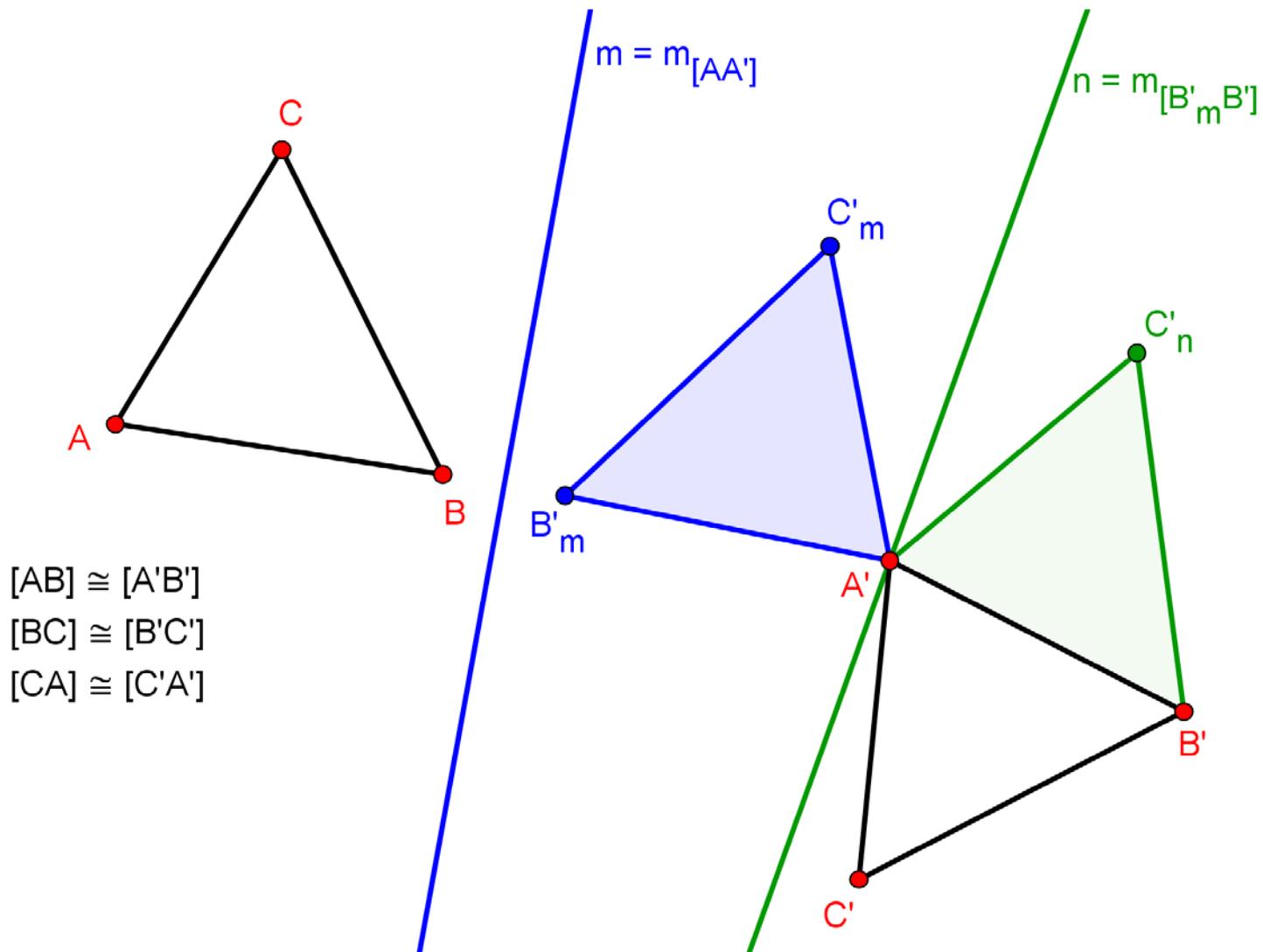
$$[AB] \cong [A'B']$$

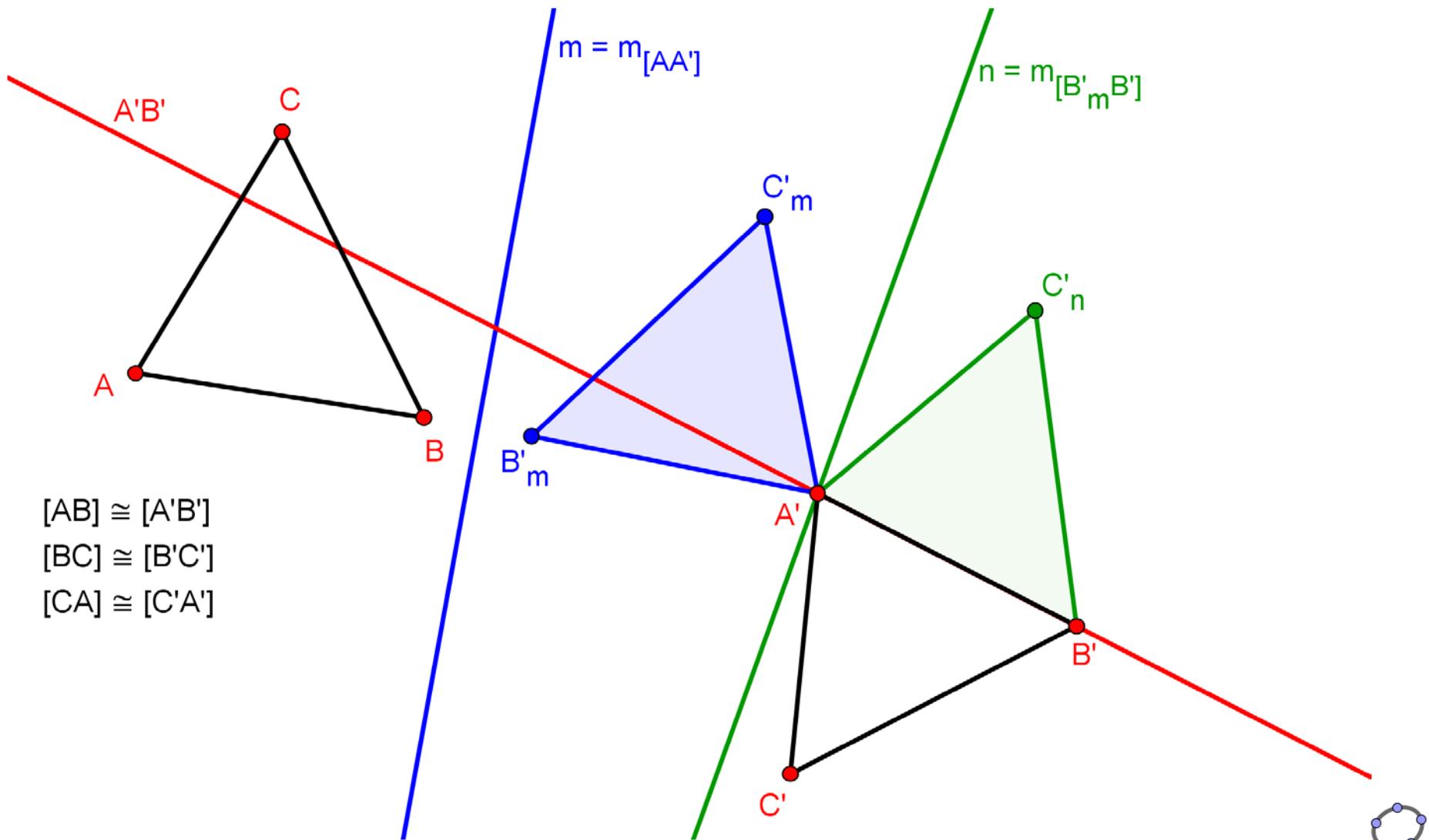
$$[BC] \cong [B'C']$$

$$[CA] \cong [C'A']$$









## ► Bemerkungen

- Der Beweis zu Satz 2.4 zeigt, dass eine Kongruenzabbildung  $\varphi$  immer existiert, wenn die Voraussetzungen

$$[A'C'] \cong [AC], [A'B'] \cong [AB] \text{ und } [B'C'] \cong [BC]$$

für vorgegebenen Punkte  $A, B, C$  sowie  $A', B'$  und  $C'$  erfüllt sind.

- Bei der Ausführung der Kongruenzabbildung ist zunächst durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten  $m = m_{[AA']}$  der Strecke  $[AA']$  der Punkt  $A$  auf den Punkt  $A'$  abzubilden. Dabei wird auch der Punkt  $B$  auf den Punkt  $B'_m$  und der Punkt  $C$  auf  $C'_m$  abgebildet.
- Anschließend ist der Punkt  $B'_m$  durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten  $n = m_{[B'_m B']}$  der Strecke  $[B'_m B]$  auf den Punkt  $B'$  abzubilden. Dabei wird auch der Punkt  $C'_m$  auf  $C'_n$  abgebildet.
- Falls  $C'_n \neq C'$  wird abschließend durch Spiegelung an  $A'B'$  der Punkt  $C'_n$  auf  $C'$  abgebildet.

## Satz 2.5

- ▶ Jede Verkettung von endlich vielen Geradenspiegelungen ist eine Kongruenzabbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich.

## ▶ Beweis

- ▶ Jede Geradenspiegelung bildet nach **Satz 1.14** Geraden auf Geraden und nach **Satz 1.16** sowie **(GS<sub>3</sub>)** Strecken auf kongruente Strecken ab.
- ▶ Wegen der Transitivität der Streckenkongruenz **(SK<sub>2</sub>)** gilt dies auch für jede beliebige Verkettung von Achsenspiegelungen. #

## ▶ Bemerkung

- ▶ Man kann damit den Satz 2.4 auch als Aussage über beliebige Verkettungen von Achsenspiegelungen verstehen:

Da jede Verkettung von Achsenspiegelungen eine längentreue Abbildung ist, muss sich eine Verkettung *beliebig vieler* Achsenspiegelungen immer mit Hilfe von *höchstens drei* Achsenspiegelungen darstellen lassen.

## ► Bemerkung

- ▶ Eine einzelne Achsenspiegelung  $S_g$  besitzt genau eine Fixpunktgerade (die Symmetrieachse) und sonst keine weiteren Fixpunkte.
- ▶ Bei einer Verkettung von zwei Achsenspiegelungen  $S_h \circ S_g$  sind drei Fälle zu unterscheiden:
  - (1)  $g = h \Rightarrow S_h \circ S_g = id_{\varepsilon}$ , d. h. alle Punkte der Ebene  $\varepsilon$  sind Fixpunkte.
  - (2)  $g \cap h = \{P\} \Rightarrow S_h \circ S_g$  besitzt mit  $P$  genau einen Fixpunkt.
  - (3)  $g \cap h = \emptyset \Rightarrow S_h \circ S_g$  besitzt keinen Fixpunkt.
- ▶ Keiner der drei Fälle kann es also durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden.
- ▶ Eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen kann also **nicht** durch eine einzelne Achsenspiegelung ersetzt werden!

## Definition 2.3

Eine Gruppe  $(\mathbf{G}, \circ)$  ist ein Paar, bestehend aus einer Menge  $\mathbf{G}$  und einer Abbildung  $\circ : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  (genannt Gruppenoperation) mit folgenden Eigenschaften:

**(G1)** Assoziativität

$$\forall a, b, c \in \mathbf{G} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

**(G2)** Existenz eines (links-)neutralen Elements

$$\exists e \in \mathbf{G} \quad \forall a \in \mathbf{G} \quad e \circ a = a$$

**(G3)** Existenz eines (links-)inversen Elements  $a^{-1}$  zu  $a$

$$\forall a \in \mathbf{G} \quad \exists a^{-1} \in \mathbf{G} \quad a^{-1} \circ a = e$$

## ► Folgerungen aus den „Gruppenaxiomen“

(1)  $a \circ a^{-1} = e$

d. h. ein linksinverses Element ist auch rechtsinvers.

(2)  $a \circ e = a$

d. h. ein linksneutrales Element ist auch rechtsneutral

(3)  $\exists!_{e \in \mathbf{G}} \forall_{a \in \mathbf{G}} e \circ a = a$

d. h. eindeutige Existenz eines neutralen Elements

(4)  $\forall_{a \in \mathbf{G}} \exists!_{a^{-1} \in \mathbf{G}} a^{-1} \circ a = e$

d. h. eindeutige Existenz eines inversen Elements

(5)  $e^{-1} = e; (a^{-1})^{-1} = a; (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Eigenschaften der Inversen

(6)  $\exists!_{x \in \mathbf{G}} x \circ a = b; \quad \exists!_{y \in \mathbf{G}} a \circ y = b$

Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen

## ► Beweis

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a \circ a^{-1} &\stackrel{\text{(G2)}}{=} e \circ (a \circ a^{-1}) \\
 &\stackrel{\text{(G3)}}{=} ((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ a^{-1}) \\
 &\stackrel{\text{(G1)}}{=} (a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ (a \circ a^{-1})) \\
 &\stackrel{\text{(G1)}}{=} (a^{-1})^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ a^{-1}) \\
 &\stackrel{\text{(G3)}}{=} (a^{-1})^{-1} \circ (e \circ a^{-1}) \\
 &\stackrel{\text{(G2)}}{=} (a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} \\
 &\stackrel{\text{(G3)}}{=} e
 \end{aligned}$$

#

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a \circ e &\stackrel{\text{(G3)}}{=} a \circ (a^{-1} \circ a) \\
 &\stackrel{\text{(G1)}}{=} (a \circ a^{-1}) \circ a \\
 &\stackrel{\text{(1)}}{=} e \circ a \\
 &\stackrel{\text{(G2)}}{=} a
 \end{aligned}$$

#

## Satz 2.6: Gruppe der Kongruenzabbildungen

- ▶ Die Menge  $\mathbf{K}$  aller Kongruenzabbildungen einer Ebene  $\varepsilon$  auf sich bildet zusammen mit der Verkettung  $\circ : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$  eine Gruppe.
- ▶ Kurz:  $(\mathbf{K}, \circ)$  ist eine Gruppe.

▶ **Beweis** (Übungsaufgabe)

▶ **Bemerkung**

- ▶ Die Symmetrieeigenschaften spezieller Figuren lassen sich durch jeweils zugehörige Untergruppen der Gruppe der Kongruenzabbildungen  $(\mathbf{K}, \circ)$  beschreiben.
- ▶ Als Hilfsmittel für spätere Überlegungen gibt der folgende Satz ein Kriterium für die Untergruppeneigenschaft einer Teilmenge  $\mathbf{U}$  von  $\mathbf{G}$  bzgl. der in  $(\mathbf{G}, \circ)$  erklärten Verknüpfung an.

## Satz 2.7: Untergruppenkriterium

- ▶  $(\mathbf{G}, \circ)$  ist eine Gruppe und  $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{G}$ .  
 $(\mathbf{U}, \circ)$  ist genau dann eine Untergruppe von  $(\mathbf{G}, \circ)$ , wenn gilt:

$$\forall x, y \in \mathbf{U} \quad x \circ y \in \mathbf{U} \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbf{U} \quad x^{-1} \in \mathbf{U}$$

### ▶ Bemerkung

- ▶ In diesem Untergruppenkriterium wird also gefordert, dass  $\mathbf{U}$ 
  - ▶ bzgl. der in  $\mathbf{G}$  geltenden Verknüpfung  $\circ$  abgeschlossen ist und
  - ▶ mit jedem Element auch dessen inverses Element enthält.
- ▶ Man prüft leicht nach, dass die beiden übrigen Gruppenaxiome dann von selbst erfüllt sind und dass auch umgekehrt für jede Untergruppe das Kriterium des Satzes 2.7 erfüllt sein muss.



Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.2 Kongruenz von Winkeln und Dreiecken

## Definition 2.4

- ▶ Eine Figur  $F_1$  heißt genau dann **kongruent** zu einer Figur  $F_2$ , wenn es eine Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt, die  $F_1$  auf  $F_2$  abbildet.

$$F_1 \cong F_2 \Leftrightarrow \exists_{\varphi \in \mathcal{K}} \varphi(F_1) = F_2$$

## ▶ Bemerkung

- ▶ Diese Definition passt zur axiomatisch festgelegten Streckenkongruenz, denn eine einzelne Geradenspiegelung bildet Strecken auf kongruente Strecken ab.
- ▶ Da jede Kongruenzabbildung sich als Verkettung von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen lässt [**Satz 2.4**] und die Streckenkongruenz transitiv ist [(**SK**<sub>2</sub>)], bildet auch jede Kongruenzabbildung Strecken auf kongruente Strecken ab.
- ▶ Umgekehrt wurde mit **Satz 2.3** bewiesen, dass zu kongruenten Strecken  $[AB] \cong [A'B']$  immer auch eine Kongruenzabbildung existiert, die  $[AB]$  auf  $[A'B']$  abbildet.

## ► Bemerkung

Die Relation „**ist kongruent zu**“ aus Definition 2.4 ist eine **Äquivalenzrelation**.

### ▷ Reflexivität

- Die Identität ist eine Kongruenzabbildung und bildet jede Figur auf sich selbst ab. Damit ist jede Figur zu sich selbst kongruent.

### ▷ Symmetrie

- Zu jeder Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt es nach **Satz 2.6** eine inverse Kongruenzabbildung  $\varphi^{-1}$ . Damit gilt mit  $F_1 \cong F_2$ , d. h.  $\varphi(F_1) = F_2$  auch immer  $F_2 \cong F_1$ , d. h.  $\varphi^{-1}(F_2) = F_1$ .

### ▷ Transitivität

- Bildet die Kongruenzabbildung  $\varphi$  die Figur  $F_1$  auf die Figur  $F_2$  ab und die Kongruenzabbildung  $\psi$  die Figur  $F_2$  auf die Figur  $F_3$  ab, dann bildet die Kongruenzabbildung  $\psi \circ \varphi$  die Figur  $F_1$  auf die Figur  $F_3$  ab.

## ► Bemerkungen

- ▷ Definition 2.4 angewandt auf Winkel führt zu folgender Aussage:
  - **Zwei Winkel**  $\alpha$  und  $\beta$  **heißen** genau dann **kongruent zueinander**, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die  $\alpha$  auf  $\beta$  abbildet.
  - Dies gilt unabhängig davon, ob man unter  $\alpha$  nur eine Menge bestehend aus zwei Halbgeraden versteht oder einen orientierten Winkel mit zugeordnetem Winkelfeld.
- ▷ Definition 2.4 angewandt auf Dreiecke führt zu folgender Aussage:
  - **Zwei Dreiecke**  $ABC$  und  $A'B'C'$  **heißen** genau dann **kongruent zueinander**, wenn es eine Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt mit  $\varphi(ABC) = A'B'C'$ .
- ▷ Das Abtragen von Strecken auf kongruente Strecken musste axiomatisch gefordert werden. Eine entsprechende Aussage über das Abtragen von Winkeln kann nun bewiesen werden.

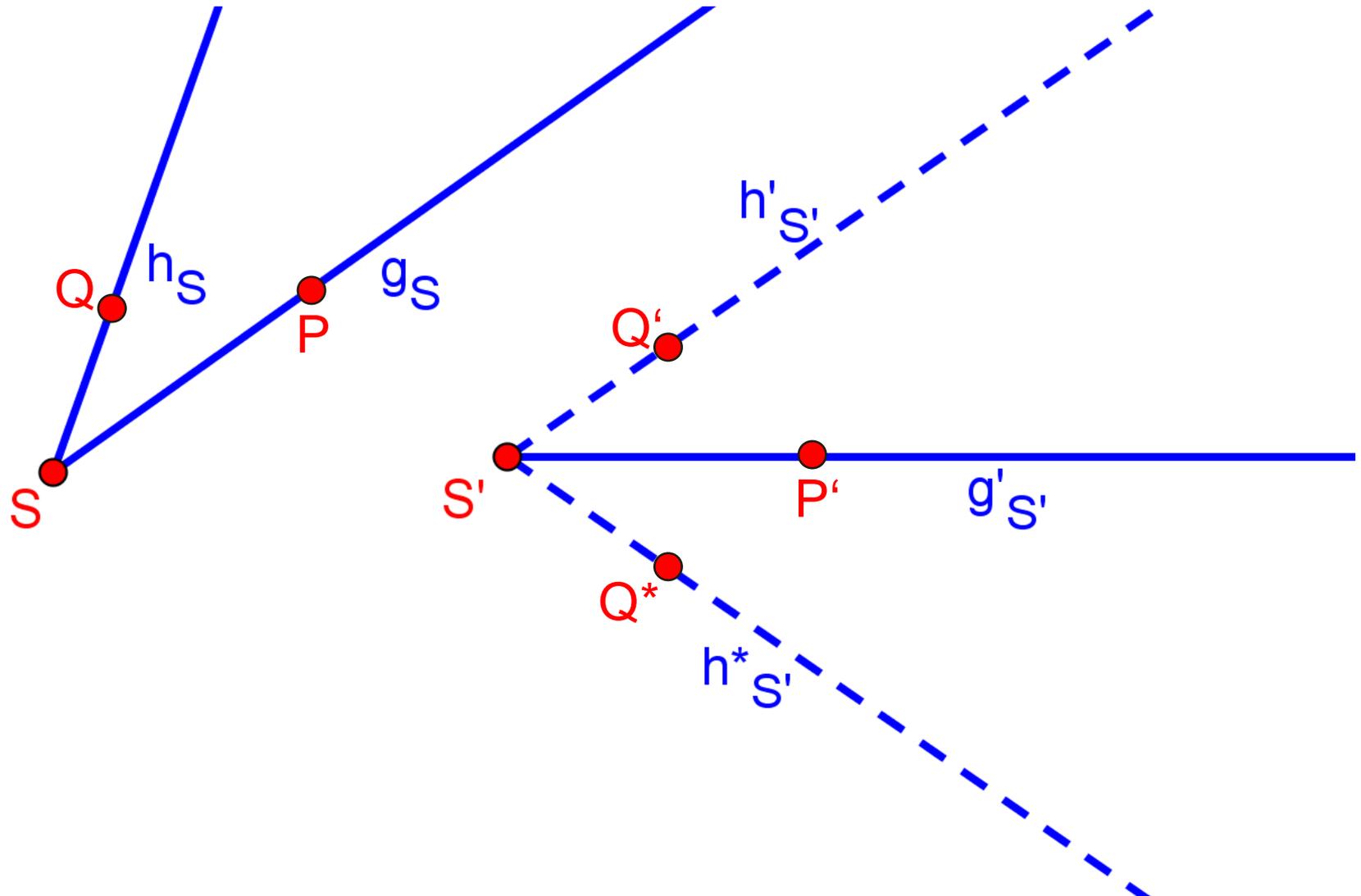
### Satz 2.8: Eindeutigkeit der Winkelabtragung

- ▶ Ist in einer Ebene  $\varepsilon$  der Winkel  $\angle(g_S, h_S)$  weder ein gestreckter Winkel, noch ein Nullwinkel und ist  $g'_{S'}$  eine beliebige Halbgerade, dann gibt es in jeder der beiden von  $g'$  in  $\varepsilon$  bestimmten Halbebenen genau eine Halbgerade  $h'_{(S')}$  bzw.  $h^*_{(S')}$ , so dass gilt:

$$\angle(g_S, h_S) \cong \angle(g'_{S'}, h'_{S'}) \cong \angle(g'_{S'}, h^*_{S'})$$

#### ▶ Beweis

- ▶ Nach Satz 2.3 gibt es genau zwei Kongruenzabbildungen, die  $g_S$  auf  $g'_{S'}$  abbilden und die sich durch eine Spiegelung an der Geraden  $g'$  unterscheiden.
- ▶ Die Bilder von  $h_S$  bei diesen Abbildungen seien die Halbgeraden  $h'_{S'}$  und  $h^*_{S'}$ . Sie sind eindeutig bestimmt und da  $\angle(g_S, h_S)$  weder gestreckt noch der Nullwinkel ist, fallen  $h'_{S'}$  und  $h^*_{S'}$  nicht mit  $g'$  zusammen, sondern liegen nach Satz 1.25 in verschiedenen Halbebenen bzgl.  $g'$ .



## ► Bemerkungen

- ▶ Auf Seite 1.81 wurde die Symmetrieachse zweier Halbgeraden  $g_S$  und  $h_S$  als **Winkelhalbierende** bezeichnet. Diese Bezeichnung erhält durch die Verallgemeinerung des Kongruenzbegriffs nachträglich seine Berechtigung:
- ▶ Wenn eine Gerade  $w$  die Symmetrieachse von  $g_S$  und  $h_S$  ist, dann bedeutet das:
  - ▶ Die Winkel  $\angle(g_S, w_S)$  und  $\angle(w_S, h_S)$  sind kongruent.
  - ▶ Ein Winkel wird durch seine Winkelhalbierende in zwei kongruente Winkel „zerlegt“.
- ▶ Zwischen der Kongruenz von Strecken und Winkeln und der Kongruenz von Dreiecken bestehen enge Beziehungen. Wird auf den beiden Schenkeln eines Winkels jeweils eine Strecke abgetragen, so entsteht ein Dreieck, das in der Schreibweise  $\angle ASB$  von Winkeln bereits verwendet wurde.

## Satz 2.9: Kongruenzsatz SSS

- ▶ Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  in einer Ebene  $\varepsilon$ , dass die drei Paare entsprechender Seiten kongruent sind, d. h.

$$[A'C'] \cong [AC] \wedge [A'B'] \cong [AB] \wedge [B'C'] \cong [BC],$$

dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent zueinander.

## ▶ Bemerkungen

- ▶ Zwei Figuren sind zueinander kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die die eine Figur auf die andere abbildet.
- ▶ Satz 2.9 wurde bereits im Rahmen des Beweises des Dreispiegelungssatzes 2.4 bewiesen.
- ▶ Die Abkürzung „SSS“ steht für „Seite – Seite – Seite“ und entsprechend im Satz 2.10 „SWS“ für „Seite – Winkel – Seite“, also für die paarweise kongruenten Teilstücke, aus denen sich jeweils die Kongruenz der Dreiecke ergibt.

## Satz 2.10: Kongruenzsatz SWS

- ▶ Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  in einer Ebene  $\varepsilon$ , dass zwei Paare entsprechender Seiten und die von den Seiten jeweils eingeschlossenen Winkel kongruent sind, dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent zueinander.

### ▶ Bemerkung

- ▶ Ein „von zwei Seiten eingeschlossener Winkel“ ist ein Innenwinkel, auf dessen Schenkeln die beiden Dreiecksseiten liegen.

### ▶ Beweis

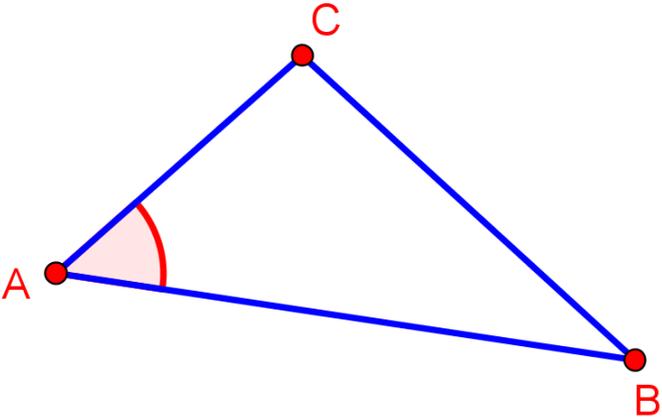
- ▶ Idee: Es ist gezeigt, dass  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent zueinander sind, wenn es gelingt eine Kongruenzabbildung anzugeben, die das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abbildet.
- ▶ O.B.d.A. sind  $A$  und  $A'$  die Scheitel der im Satz 2.10 genannten Winkel (Andernfalls die Eckpunkte der Dreiecke umbenennen!).

### ► Beweis zu Satz 2.10 (Fortsetzung)

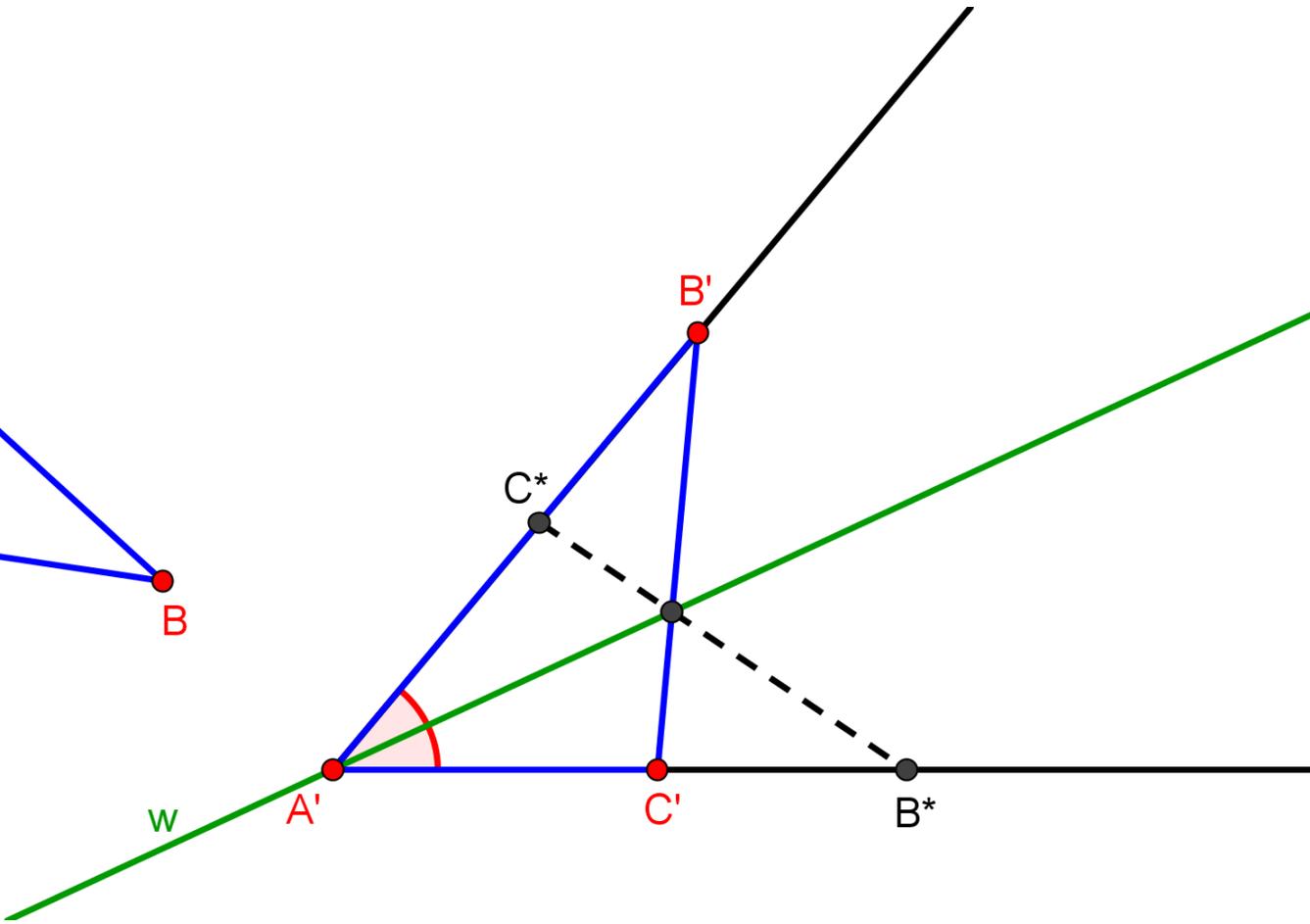
- ▶ Da  $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$  ist, gibt es nach Definition 2.4 eine Kongruenzabbildung  $\varphi$  die  $\angle BAC$  auf  $\angle B'A'C'$  abbildet.
- ▶ Es gelte weiterhin  $\varphi(B) = B^*$  und  $\varphi(C) = C^*$ .
- ▶ Ist  $B' = B^*$  und  $C' = C^*$ , dann ist  $\varphi$  bereits die gesuchte Kongruenzabbildung, die  $ABC$  auf  $A'B'C'$  abbildet.
- ▶  $B^*$  könnte aber auch auf der Halbgeraden  $[A'C'$  liegen und  $C^*$  auf der Halbgeraden  $[A'B'$ .
- ▶ In diesem Fall spiegelt man noch an der eindeutig bestimmten Winkelhalbierenden  $w$  des Winkels  $\angle B'A'C'$  und erhält mit  $S_w \circ \varphi$  die gesuchte Kongruenzabbildung, die das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abbildet.
- ▶ Damit sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.

#





$[AB] \cong [A'B']$   
 $[AC] \cong [A'C']$   
 $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$



## Satz 2.11: Kongruenzsatz WSW

- ▷ Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  in einer Ebene  $\varepsilon$ , dass ein Paar entsprechender Seiten und die Paare der jeweils an diesen Seiten anliegenden Winkel kongruent sind, dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent zueinander.

### ▶ Beweis

- ▷ O.B.d.A. sei  $[AB] \cong [A'B']$ ,  $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$  und  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  (Andernfalls die Eckpunkte der Dreiecke umbenennen!).
- ▷ Wegen  $[AB] \cong [A'B']$  gibt es nach Satz 2.3 eine Kongruenzabbildung  $\varphi$ , mit  $\varphi(A) = A'$  und  $\varphi(B) = B'$ .

- ▷ Es gelte weiterhin  $\varphi(C) = C^*$ .  
Damit folgt nach Definition 2.4:

$$\angle CAB \cong \angle C^*A'B' \quad \text{und} \quad \angle ABC \cong \angle A'B'C^*,$$

weil mit  $\varphi$  eine Kongruenzabbildung existiert, die die Winkel aufeinander abbildet.

### ► Beweis zu Satz 2.11: Kongruenzsatz WSW (Fortsetzung)

1. *Fall*:  $C^*$  liegt bzgl.  $A'B'$  in derselben Halbebene wie  $C'$ .

▷ Dann gilt wegen Satz 2.8 (Eindeutigkeit der Winkelabtragung):

$$[A'C^* = [A'C' \quad \text{und} \quad [B'C^* = [B'C'.$$

▷ Also muss  $C^*$  als Schnittpunkt von  $[A'C^*$  und  $[B'C^*$  gleich  $C'$  sein.

▷ Damit ist mit Satz 2.1 die Kongruenzabbildung  $\varphi$  eindeutig bestimmt. Sie bildet das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  ab.

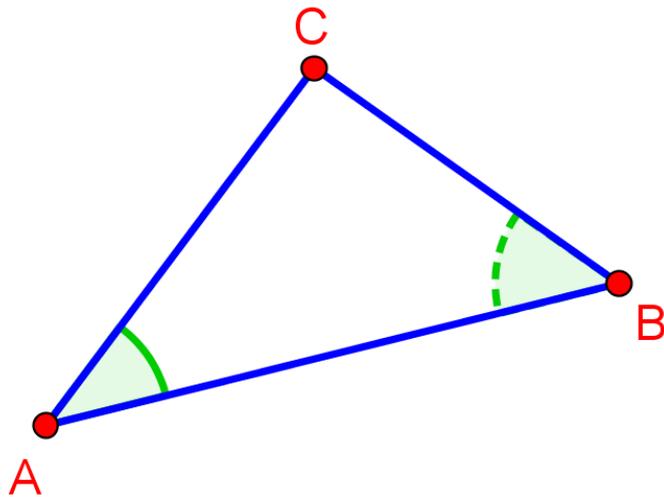
▷ Nach Definition 2.4 sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.

2. *Fall*:  $C^*$  und  $C'$  liegen bzgl.  $A'B'$  in verschiedenen Halbebenen

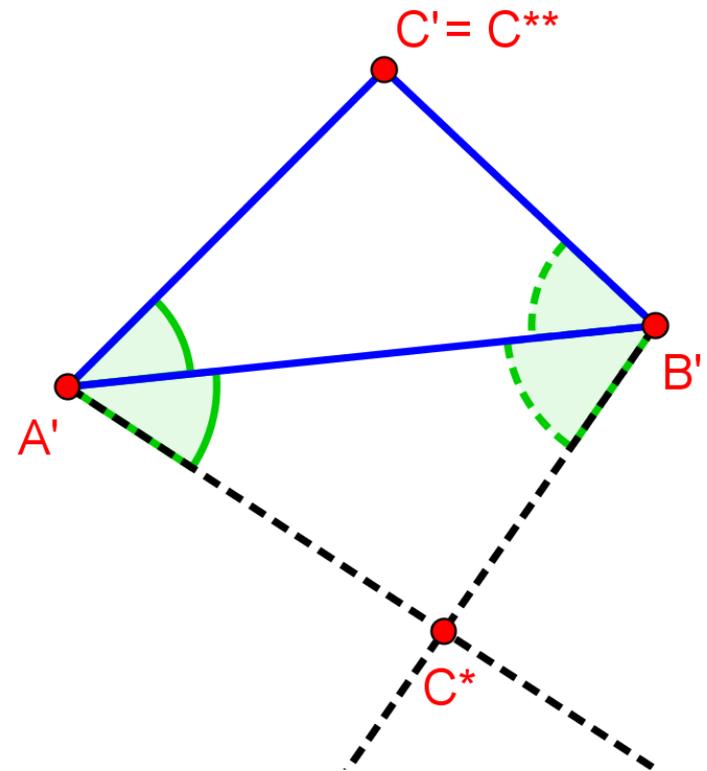
▷ Man spiegelt  $C^*$  an  $A'B'$  und es gilt  $S_{A'B'}(C^*) = C^{**}$ .

▷ Nach den selben Überlegungen wie im 1. Fall muss dann  $C^{**}$  als Schnittpunkt von  $[A'C^{**}$  und  $[B'C^{**}$  gleich  $C'$  sein.

▷  $S_{A'B'} \circ \varphi$  bildet also das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  ab.



$$\begin{aligned}[AB] &\cong [A'B'] \\ \angle BAC &\cong \angle B'A'C' \\ \angle CBA &\cong \angle C'B'A'\end{aligned}$$



## Satz 2.11a: Kongruenzsatz SsW

- ▶ Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  in einer Ebene  $\varepsilon$ , dass zwei Paare entsprechender Seiten und das Paar der den größeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel kongruent sind, dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent zueinander.

## ▶ Bemerkung

- ▶ Aussagen über die Kongruenz von Dreiecken treten in den Elementen des Euklid und auch in den Grundlagen der Geometrie von Hilbert an Stelle der hier gewählten Spiegelungsaxiome.
- ▶ Dies macht deutlich, dass man die Geometrie axiomatisch sowohl über die Kongruenz von Dreiecken als auch über Geradenspiegelungen aufbauen kann.
- ▶ Unabhängig davon sind die Kongruenzsätze für viele elementargeometrischen Anwendungen ein wichtiges und unverzichtbares Beweismittel.

Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

## **2.3 Gleichsinnige und nicht gleichsinnige Kongruenz- abbildungen – Orientierung**

## ► Bemerkung

- ▶ Mit dem Dreispiegelungssatz (Satz 2.4) wurde bewiesen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch die Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen ersetzen lässt.
- ▶ Es fehlt noch der Nachweis, dass es überhaupt Kongruenzabbildungen gibt, zu deren Ersetzung man *drei* Achsenspiegelungen benötigt. Die Schubspiegelungen werden sich als solche Kongruenzabbildungen erweisen.
- ▶ Es muss gezeigt werden, dass Verkettungen einer *ungeraden* Anzahl von Achsenspiegelungen (*nicht gleichsinnige Kongruenzabbildungen*) nicht die selben Abbildungen ergeben können wie Verkettungen einer *geraden* Anzahl von Achsenspiegelungen (*gleichsinnige Kongruenzabbildungen*).
- ▶ Erst mit Hilfe der gleichsinnigen Kongruenzabbildungen lässt sich der Begriff des *Umlaufsinnns* von Dreiecken, Polygonen und Winkeln genauer fassen.

## Satz 2.12: Reduktionssatz für drei Achsenspiegelung

- ▶ Eine Verkettung von drei Spiegelungen an Geraden in der Ebene  $\varepsilon$ , die zueinander parallel sind oder sich in genau einem Punkt schneiden, lässt sich durch eine Achsenspiegelung ersetzen.

$$\forall_{g, h, k \subset \varepsilon} g \parallel h \parallel k \vee g \cap h \cap k = \{S\} \Rightarrow \exists_{m \subset \varepsilon} S_k \circ S_h \circ S_g = S_m$$

### ▶ Beweis

- ▶ Für die drei Geraden  $g, h, k$  gelte  $g \neq h$ , da sonst sofort folgt:  $m = k$ .
- ▶ Beweisidee: Es wird gezeigt, dass es eine Gerade  $m$  gibt, mit

$$S_h \circ S_g = S_k \circ S_m$$

Daraus ergibt sich durch Verkettung mit  $S_k$  sofort die Behauptung.

### ► Beweis zu Satz 2.12 (Fortsetzung)

1. Fall:  $g \parallel h \parallel k$

- ▷ Es werden zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gewählt, deren Bilder nach den Spiegelungen an  $g$ ,  $h$  und  $k$  auf die Gerade  $k$  fallen. Es gelte also:

$$\underbrace{P'}_{\in k} = (S_k \circ S_h \circ S_g)(P) = S_k(\underbrace{(S_h \circ S_g)(P)}_{\in k}) = (S_h \circ S_g)(P)$$

$$\underbrace{Q'}_{\in k} = (S_k \circ S_h \circ S_g)(Q) = S_k(\underbrace{(S_h \circ S_g)(Q)}_{\in k}) = (S_h \circ S_g)(Q)$$

- ▷ Wegen  $g \parallel h \parallel k$  und damit  $g \parallel P'Q'$  muss wegen der Parallelen-treue der Achsenspiegelungen (Satz 1.17) auch  $g \parallel PQ$  gelten.
- ▷ Wenn  $m$  die Symmetrieachse der Punkte  $P$  und  $P'$  bzw.  $Q$  und  $Q'$  ist, dann ist  $S_m(P) = P'$  und  $S_m(Q) = Q'$ .
- ▷ Nach Satz 2.3 können sich die Abbildungen  $S_h \circ S_g$  und  $S_m$  höchstens um die Achsenspiegelung  $S_{P'Q'} = S_k$  unterscheiden.
- ▷ Da eine Spiegelung nicht gleich der Verkettung zweier Spiegelungen sein kann (vgl. S. 2.18), muss gelten:  $S_h \circ S_g = S_k \circ S_m$

### ► Beweis zu Satz 2.12 (Fortsetzung)

2. Fall:  $g \cap h \cap k = \{S\}$

- ▷  $P \neq S$  sei ein Punkt, dessen Bild nach den Spiegelungen an  $g$ ,  $h$  und  $k$  auf die Gerade  $k$  fällt. Es gelte also:

$$\underbrace{P'}_{\in k} = (S_k \circ S_h \circ S_g)(P) = S_k(\underbrace{(S_h \circ S_g)(P)}_{\in k}) = (S_h \circ S_g)(P)$$

- ▷ Da  $S$  ein Fixpunkt von  $S_h \circ S_g$  ist, gilt wegen **(GS<sub>3</sub>)**:  $[SP] \cong [SP']$ .
- ▷ Damit muss wegen Satz 1.13 die Symmetrieachse  $m$  von  $P$  und  $P'$  durch  $S$  verlaufen. Folglich gilt:

$$S_m(P) = P' = (S_h \circ S_g)(P) \quad \wedge \quad S_m(S) = S = (S_h \circ S_g)(S)$$

- ▷ Nach Satz 2.3 können sich die Abbildungen  $S_h \circ S_g$  und  $S_m$  höchstens um die Achsenspiegelung  $S_{SP'} = S_k$  unterscheiden.
- ▷ Da eine Spiegelung nicht gleich der Verkettung zweier Spiegelungen sein kann (vgl. S. 2.18), muss gelten:  $S_h \circ S_g = S_k \circ S_m$

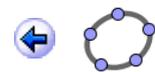
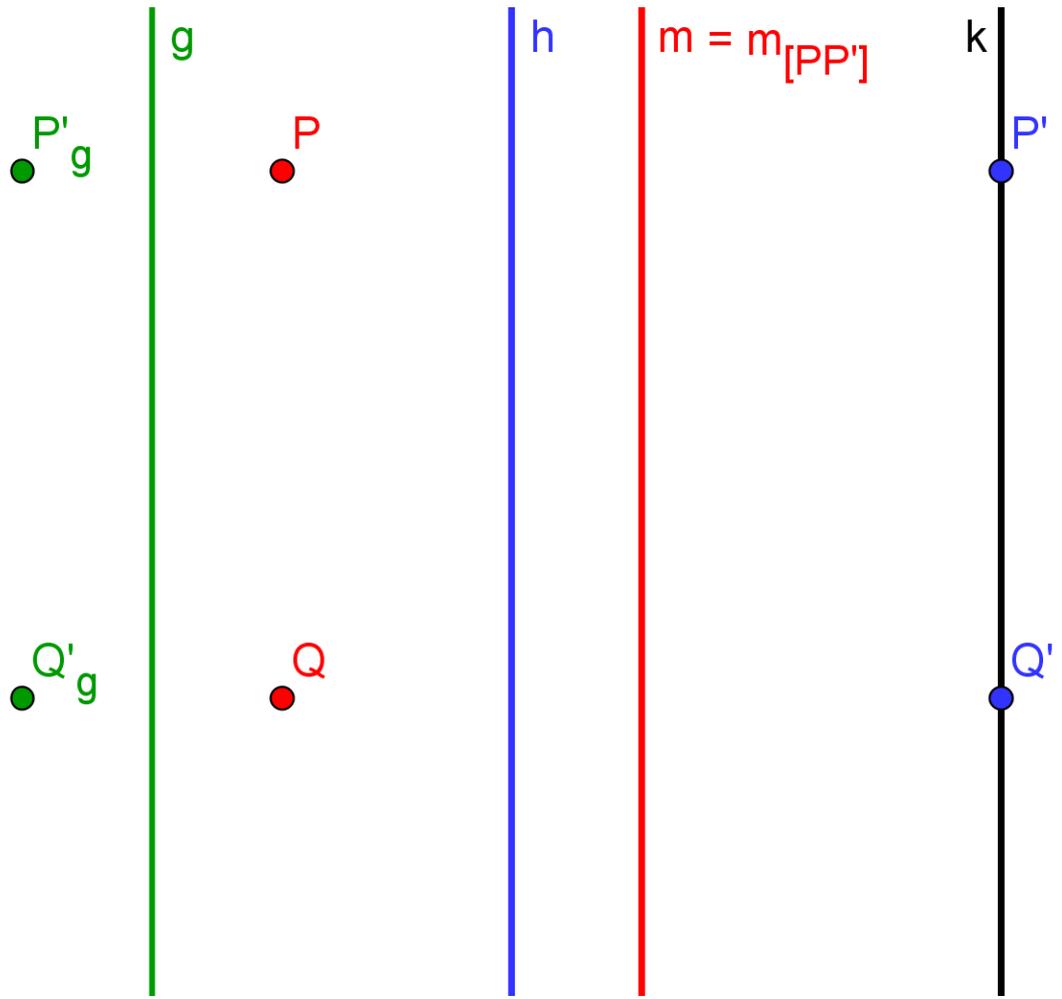
In beiden Fällen folgt (Verkettung mit  $S_k$ ):  $S_k \circ S_h \circ S_g = S_m$

#



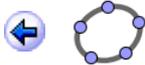
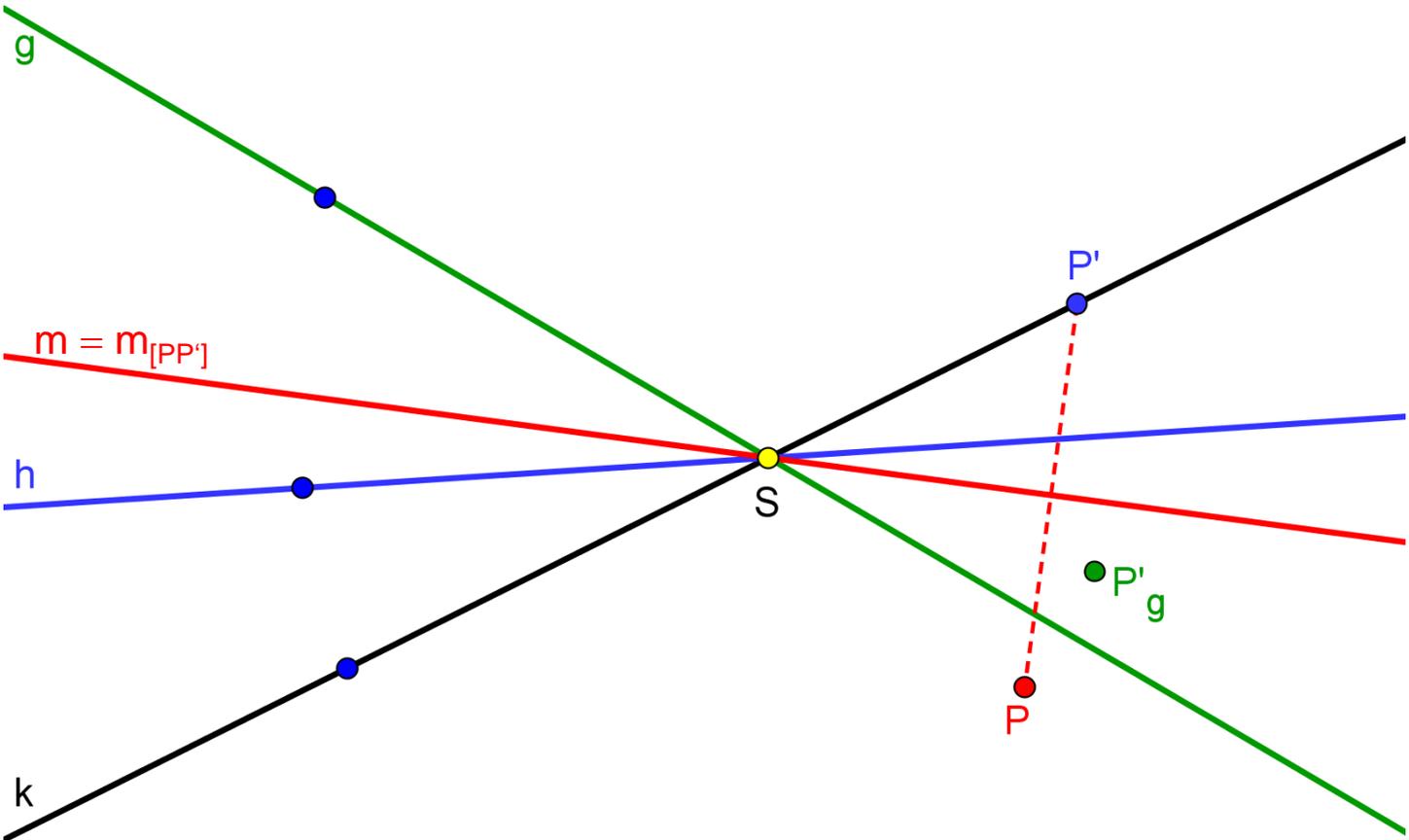
# Beweis zu Satz 2.12

## Fortsetzung



# Beweis zu Satz 2.12

## Fortsetzung



## ► Bemerkung

- Eine einfache Umformung des Satzes 2.12 (Reduktionssatz für drei Achsenspiegelungen) führt zu folgendem Satz:

### Satz 2.13

$$\forall_{g, h, k \in \varepsilon} (g \parallel h \parallel k \vee g \cap h \cap k = \{S\}) \\ \Rightarrow (\exists_{m \in \varepsilon} S_h \circ S_g = S_k \circ S_m \wedge \exists_{n \in \varepsilon} S_h \circ S_g = S_n \circ S_k)$$

## ► Beweis

$$\forall_{g, h, k \in \varepsilon} g \parallel h \parallel k \vee g \cap h \cap k = \{S\}$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.12}}{\Rightarrow} \exists_{m \in \varepsilon} S_k \circ S_h \circ S_g = S_m \quad \wedge \quad \exists_{n \in \varepsilon} S_h \circ S_g \circ S_k = S_n$$

$$\stackrel{\text{Verkettung mit } S_k}{\Rightarrow} \exists_{m \in \varepsilon} S_k \circ S_k \circ S_h \circ S_g = S_k \circ S_m \quad \wedge \quad \exists_{n \in \varepsilon} S_h \circ S_g \circ S_k \circ S_k = S_n \circ S_k$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.15}}{\Rightarrow} \exists_{m \in \varepsilon} id_\varepsilon \circ S_h \circ S_g = S_k \circ S_m \quad \wedge \quad \exists_{n \in \varepsilon} S_h \circ S_g \circ id_\varepsilon = S_n \circ S_k$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.6 (G2)}}{\Rightarrow} \exists_{m \in \varepsilon} S_h \circ S_g = S_k \circ S_m \quad \wedge \quad \exists_{n \in \varepsilon} S_h \circ S_g = S_n \circ S_k$$

#

## Satz 2.14: Reduktionssatz für vier Achsenspiegelungen

- ▶ Eine Verkettung von vier Achsenspiegelungen in einer Ebene  $\varepsilon$ , lässt sich immer durch die Verkettung von genau zwei Achsenspiegelungen ersetzen.

### ▶ Beweis

$S_m \circ S_k \circ S_h \circ S_g$  sei die Verkettung der vier Geradenspiegelungen.

- ▶ **1. Fall:** Sind zwei aufeinanderfolgende Achsenspiegelungen identisch, also Spiegelungen an derselben Geraden (z. B.  $g = h$ ) dann bilden sie zusammen die identische Abbildung und die Verkettung besteht nur noch aus zwei Abbildungen (im Bsp.  $S_m \circ S_k$ ).
- ▶ **2. Fall:** Gilt für drei aufeinanderfolgende Abbildungen die Voraussetzung des Reduktionssatzes für drei Achsenspiegelung (alle zueinander parallel oder alle schneiden sich im selben Punkt) dann lassen sie sich durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzen und die Verkettung besteht nur noch aus zwei Abbildungen.

## ► Beweis von Satz 2.14 (Fortsetzung)

$S_m \circ S_k \circ S_h \circ S_g$  sei die Verkettung der vier Geradenspiegelungen.

**Idee:** Zwei der vier Spiegelungen durch zwei geeignete andere ersetzen, so dass anschließend für drei aufeinanderfolgende Spiegelungen die Voraussetzungen von Satz 2.12 erfüllt sind.

▷ **3. Fall:**  $g \cap h = \{P\} \wedge k \cap m = \{Q\}$

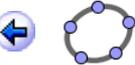
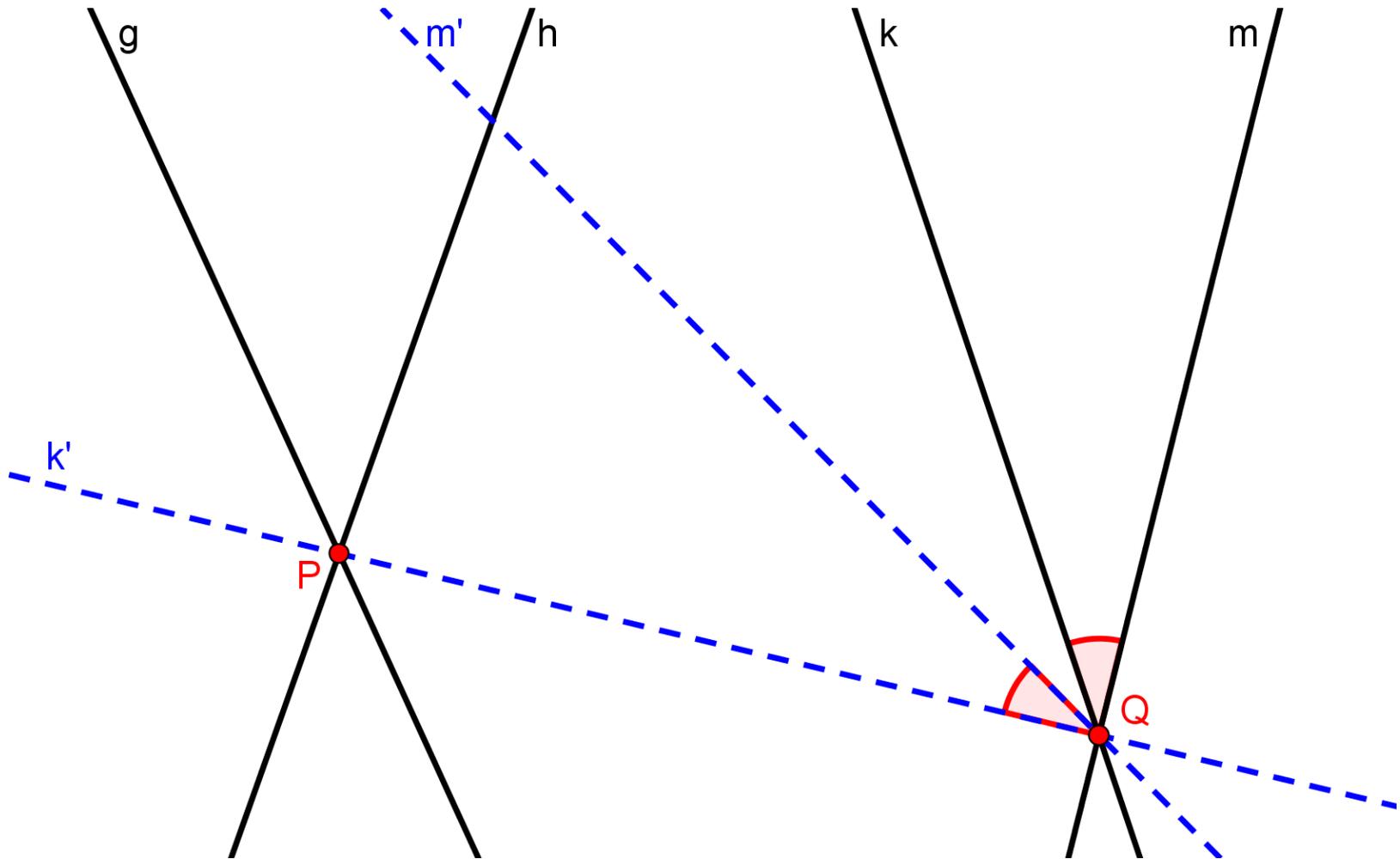
$k' = PQ$ , und  $m'$  ist die nach Satz 2.13 eindeutig existierende Gerade, für die  $S_m \circ S_k = S_{m'} \circ S_{k'}$  ist.

Dann gilt:  $S_m \circ S_k \circ S_h \circ S_g = S_{m'} \circ S_{k'} \circ S_h \circ S_g$

Die Geraden  $g$ ,  $h$ ,  $k'$  schneiden sich alle im Punkt  $P$  und erfüllen folglich die Voraussetzung von Satz 2.12 (Reduktionssatz für drei Achsenspiegelungen). Sie lassen sich also durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzen.

Die Verkettung von vier Achsenspiegelung ist damit durch die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen ersetzt.

# Reduktionssatz für vier Achsenspiegelungen



## ► Beweis von Satz 2.14 (Fortsetzung)

- ▷ **4. Fall:**  $g \cap h = \{P\} \wedge k \cap m = \emptyset$  (d. h.  $k, m$  sind echt parallel)

Man wähle  $k'$  so, dass  $k' \parallel k$  und  $P \in k'$ .  $m'$  ist die nach Satz 2.13 eindeutig existierende Gerade, für die  $S_m \circ S_k = S_{m'} \circ S_{k'}$  ist.

Dann gilt: 
$$S_m \circ S_k \circ S_h \circ S_g = S_{m'} \circ S_{k'} \circ S_h \circ S_g$$

Die Geraden  $g, h, k'$  schneiden sich alle im Punkt  $P$  und erfüllen folglich die Voraussetzung von Satz 2.12 (Reduktionssatz für drei Achsenspiegelungen). Sie lassen sich also durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzen.

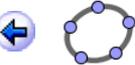
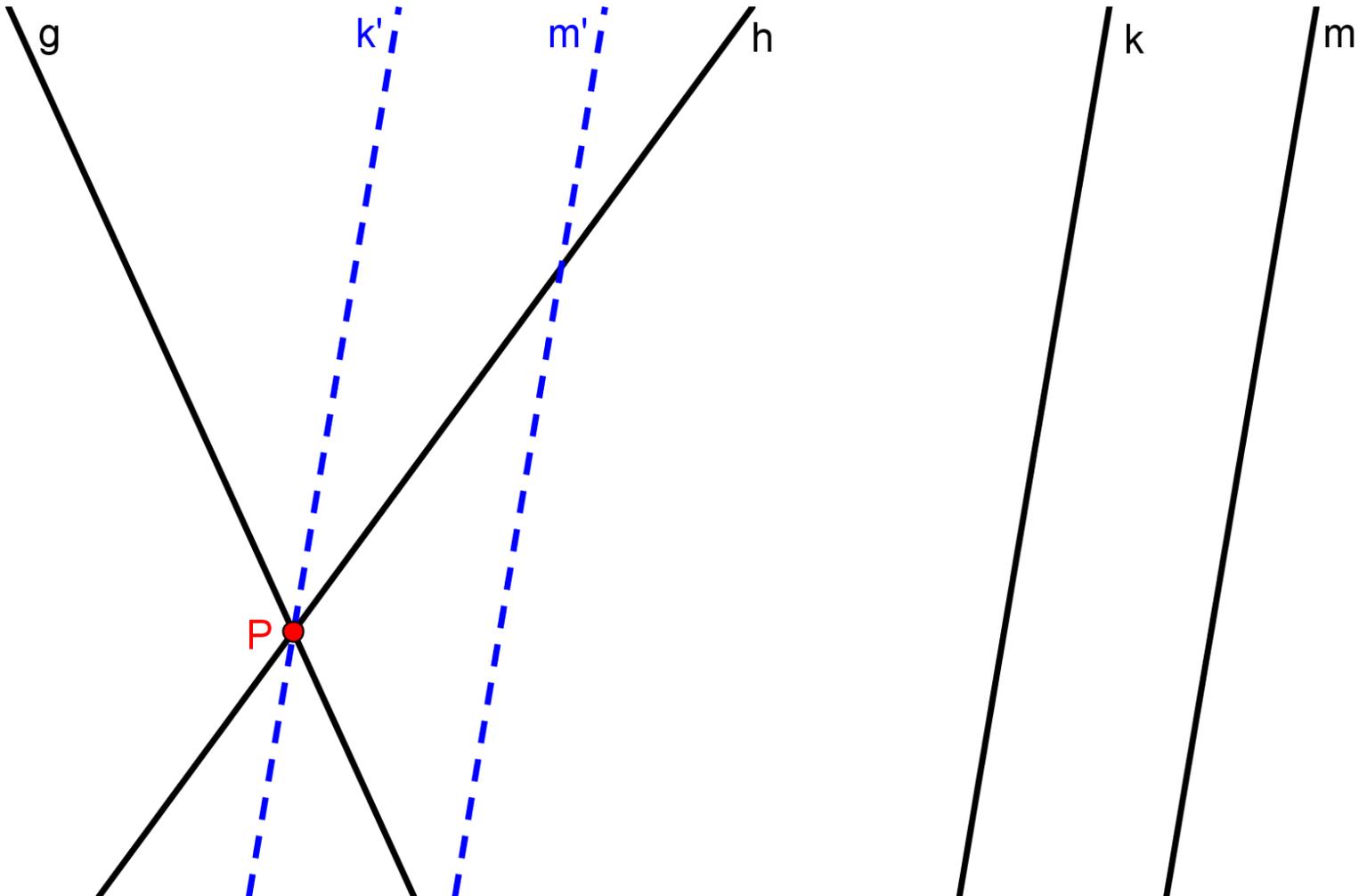
Die Verkettung von vier Achsenspiegelung ist damit durch die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen ersetzt.

- ▷ **5. Fall:**  $g \cap h = \emptyset \wedge k \cap m = \{Q\}$  (d. h.  $g, h$  sind echt parallel)

Man wähle  $h'$  so, dass  $h' \parallel h$  und  $Q \in h'$ .  $g'$  ist die nach Satz 2.13 eindeutig existierende Gerade, für die  $S_h \circ S_g = S_{h'} \circ S_{g'}$  ist.

Der Rest erfolgt analog zum 4. Fall.

# Reduktionssatz für vier Achsenspiegelungen



## ► Beweis von Satz 2.14 (Fortsetzung)

▷ 6. Fall:  $g \cap h = \emptyset \wedge k \cap m = \emptyset$

(d. h.  $g, h$  sind echt parallel und  $k, m$  sind echt parallel)

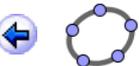
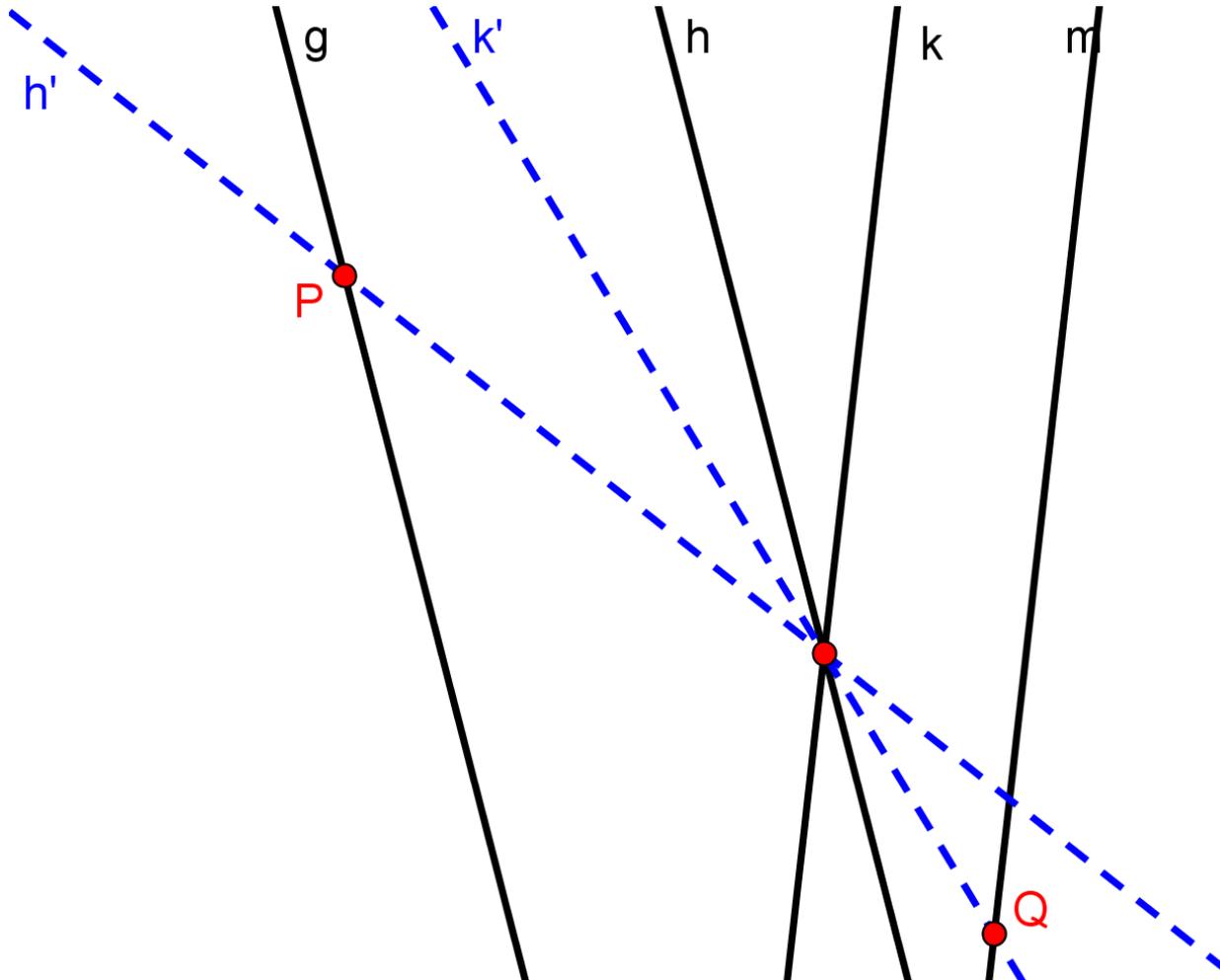
$h$  und  $k$  werden so durch zwei Achsen  $h'$  und  $k'$  ersetzt, dass  $S_k \circ S_h = S_{k'} \circ S_{h'}$  ist und sich die Geraden  $g$  und  $h'$  in einem Punkt  $P$  schneiden und die Geraden  $k'$  und  $m$  sich in einem Punkt  $Q$  schneiden. Auf die Verkettung  $S_m \circ S_{k'} \circ S_{h'} \circ S_g$  lässt sich dann der 3. Fall anwenden. #

## ► Bemerkung

▷ Aus Satz 2.14 folgt direkt: Jede Verkettung aus einer **geraden** Anzahl von Geradenspiegelungen ist mit Hilfe der Verkettung von **genau zwei** Geradenspiegelungen darstellbar.

▷ **Begründung:** Wenn man vier Achsenspiegelungen durch zwei ersetzt, verringert sich die Gesamtzahl um 2. Bei einer Verkettung von  $2n$  Achsenspiegelungen verringert sich die Anzahl der Spiegelungen nach  $n - 1$  solchen Schritten auf  $2n - 2 \cdot (n - 1) = 2$ .

# Reduktionssatz für vier Achsenspiegelungen



► **Bemerkung**

Eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen kann

- ▷ wegen der Fixpunkteigenschaften *nicht durch eine* einzelne Achsenspiegelung (**vgl. Seite 2.18**) und
- ▷ wegen **Satz 2.14** auch *nicht durch drei* Achsenspiegelungen ersetzt werden.

Wäre nämlich

$$S_k \circ S_h \circ S_g = S_n \circ S_m$$

so ergäbe sich nach Verkettung mit  $S_n$  die Gleichung

$$S_n \circ S_k \circ S_h \circ S_g = S_m$$

Hier ist die linke Seite nach **Satz 2.14** durch die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen ersetzbar. Diese können aber wegen der Fixpunkteigenschaften nicht gleich einer einzelnen Achsenspiegelung sein (**vgl. Seite 2.18**).

## ► Bemerkung

- Aus dem bisher Erarbeiteten folgt, dass man Kongruenzabbildungen in Klassen einteilen kann, die sich daraus ergeben, ob die Kongruenzabbildungen durch die Verkettung einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Achsenspiegelungen ersetzt werden können.

## Definition 2.5

- Eine Kongruenzabbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt genau dann **gleichsinnig**, wenn sie als Verkettung einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen darstellbar ist.

## ► Bemerkung

- Die Verkettung zweier gleichsinniger Kongruenzabbildungen ist wieder als Verkettung einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen darstellbar. Dies gilt auch für die Umkehrabbildung einer solchen Abbildung. Dies beweist mit Satz 2.7 folgenden Satz:

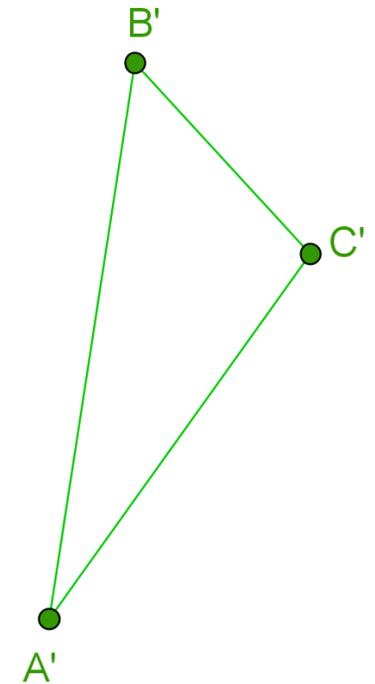
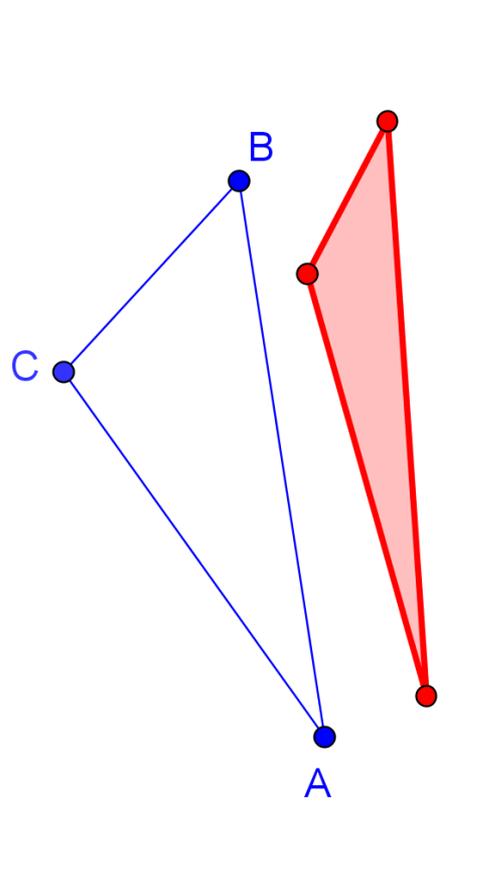
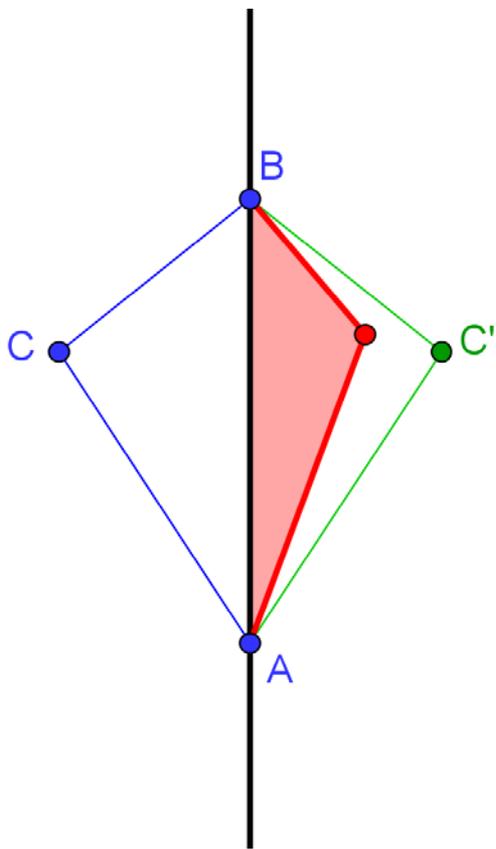
## Satz 2.15: Untergruppe der gleichsinnigen Kongruenzabbildungen

- ▷ Die Menge der gleichsinnigen Kongruenzabbildungen  $\mathbf{K}_g$  bildet bzgl. der in  $\mathbf{K}$  geltenden Verkettung eine Untergruppe der Gruppe  $(\mathbf{K}, \circ)$ .
- ▷ Kurz:  $(\mathbf{K}_g, \circ)$  ist eine Untergruppe von  $(\mathbf{K}, \circ)$ .

### ▶ Bezeichnungen

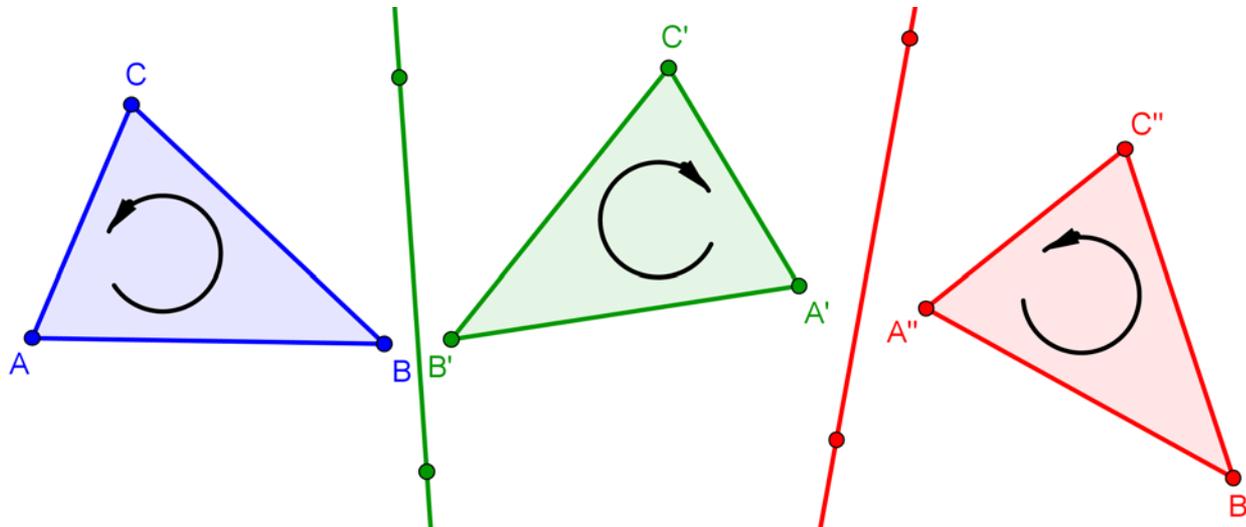
- ▷ *Kongruenzabbildungen* werden gelegentlich auch als **Bewegungen** bezeichnet.
- ▷ *Gleichsinnige Kongruenzabbildungen* werden auch als **echte Bewegungen** bezeichnet.
- ▷ *Ungleichsinnige Kongruenzabbildungen* werden auch als **Umwendungen** bezeichnet. Diese Bezeichnung geht darauf zurück, dass man eine Geradenspiegelung im Raum als Wenden (Klappen) um eine Achse auffassen kann.

# Achsen Spiegelung als „Klappen“ oder „Umwenden“ im Raum



## ► Bemerkung

- Die Auffassung einer Geradenspiegelung als Wenden oder Klappen um die Achse im Raum korrespondiert mit der anschaulichen Erfahrung, dass sich der **Umlaufsinn** bzw. die **Orientierung** einer Geometrischen Figur bei einer Geradenspiegelung umkehrt und entsprechend bei einer Verkettung einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen erhalten bleibt.



## Definition 2.6

- ▶ Ein Dreieck  $ABC$  heißt **orientiert**, wenn eine zyklische Reihenfolge für seine Eckpunkte gegeben ist. Ein orientiertes Dreieck mit der Eckenfolge  $A \rightarrow B \rightarrow C$  wird kurz mit  $(ABC)$  bezeichnet.

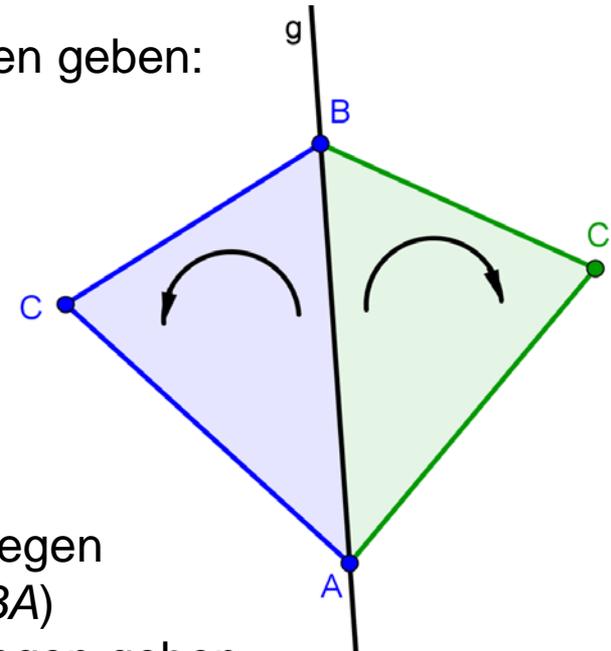
## ▶ Bemerkungen

Es kann nur genau zwei verschiedene Orientierungen geben:

### ▶ *Argument 1:*

Durchläuft man von  $A$  aus die Strecke  $[AB]$  auf  $g$  und will zur Ecke  $C$  weiterlaufen, dann muss man  $g$  verlassen und hat nur zwei Möglichkeiten:  $C$  kann nur in einer der beiden Halbebenen bzgl.  $g$  liegen.

- ▶ *Argument 2:* Da es nur sechs verschiedene Anordnungen der drei Eckpunkte gibt, kann es wegen  $(ABC) = (CAB) = (BCA) \wedge (ACB) = (BAC) = (CBA)$  für ein Dreieck nur zwei verschiedene Orientierungen geben.



## Definition 2.7

- ▶ Zwei orientierte Dreiecke  $(A_1B_1C_1)$  und  $(A_2B_2C_2)$  einer Ebene  $\varepsilon$  heißen genau dann **gleichorientiert**, wenn es eine *gleichsinnige* Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt, für die gilt:

$$\varphi([A_1B_1) = [A_2B_2 \quad \wedge \quad \varphi(C_1) \in A_2B_2C_2^+$$

## ▶ Bemerkungen

- ▶  $\varphi(C_1) \in A_2B_2C_2^+$  bedeutet, dass  $\varphi(C_1)$  in derselben Halbebene bezüglich der Geraden  $A_2B_2$  liegt, wie  $C_2$ .
- ▶ Es gibt genau eine gleichsinnige Kongruenzabbildung  $\varphi$  mit  $\varphi([A_1B_1) = [A_2B_2$ , denn es gibt nach Satz 2.3 genau zwei Kongruenzabbildungen die  $[A_1B_1$  auf  $[A_2B_2$  abbilden und die sich durch eine Achsenspiegelung unterscheiden. Genau eine davon ist gleichsinnig.

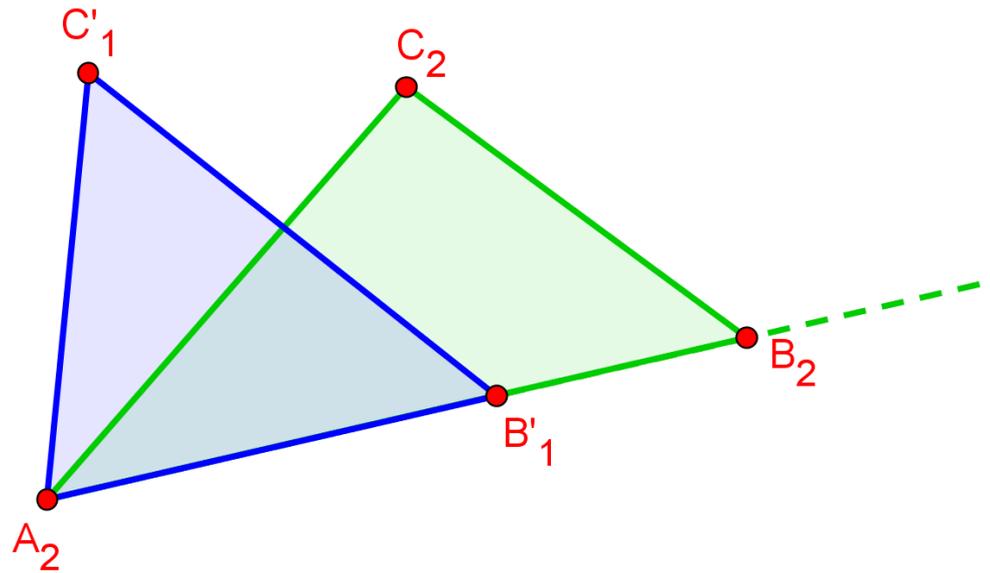
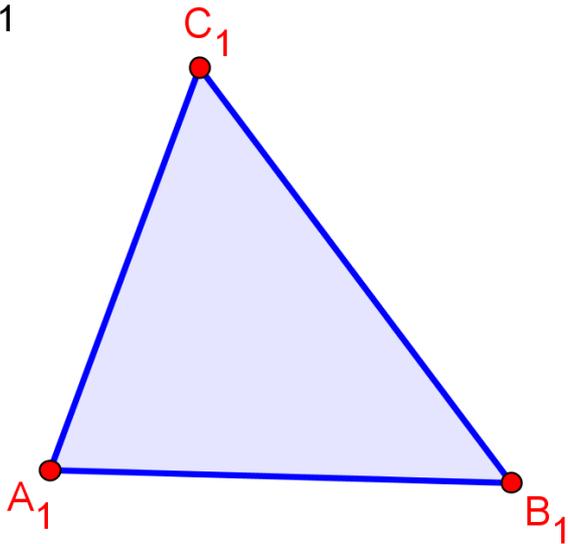
# Orientierung vergleichen

$\varphi$  ist eine gleichsinnige  
Kongruenzabbildung, mit

$$\varphi(A_1) = A_2$$

$$\varphi(B_1) = B'_1 \in [A_2B_2]$$

$$\varphi(C_1) = C'_1$$



## Satz 2.16

- ▶ Die Relation „gleichorientiert“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Dreiecke der Ebene  $\varepsilon$ .

## ▶ Bemerkungen

- ▶ Alle bisherigen Aussagen über orientierte Dreiecke lassen sich auf konvexe, einfach geschlossene Polygone übertragen, weil sie bzgl. der Stützgerade einer Seite „ganz“ in einer Halbebene liegen.

## Definition 2.8

- ▶ Zwei orientierte Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  einer Ebene  $\varepsilon$  heißen genau dann **gleichorientiert**, wenn es eine *gleichsinnige* Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt, für die gilt:
  - ▶  $\varphi(\beta)$  hat denselben Erstschenkel wie  $\alpha$   $\wedge$
  - ▶  $W_{\varphi(\beta)} \subseteq W_\alpha \vee W_\alpha \subseteq W_{\varphi(\beta)}$

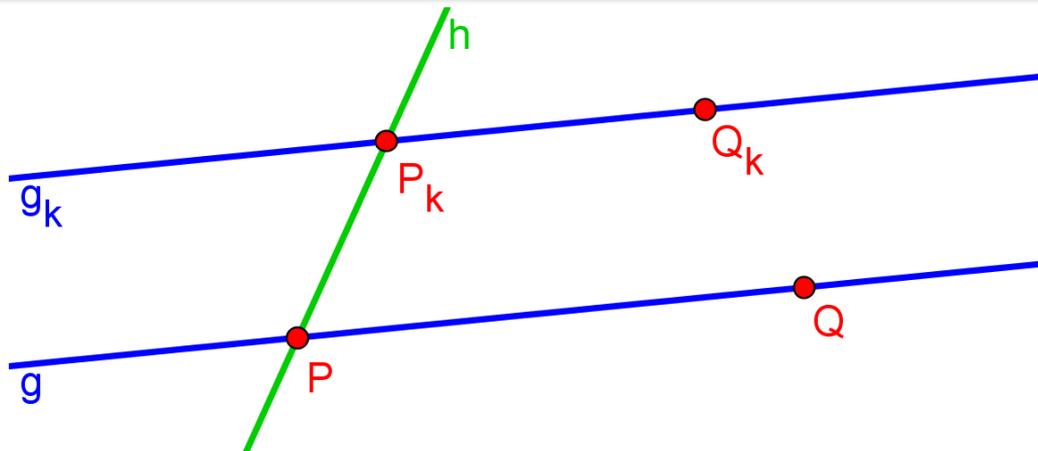
## ► Folgerungen

- ▶ Für nichtüberstumpfe orientierte Winkel  $\sphericalangle BAC$  und  $\sphericalangle EDF$  gilt:  
 $\sphericalangle BAC$  und  $\sphericalangle EDF$  sind genau dann gleichorientiert, wenn die Dreiecke  $(ABC)$  und  $(DEF)$  gleichorientiert sind.
- ▶ Für alle orientierten Dreiecke, deren eine Seite auf einer Geraden  $g$  liegt und für alle orientierten Winkel, die einen gemeinsamen ersten Schenkel auf  $g$  haben, ist die Orientierung durch eine der beiden Halbebenen von  $g$  bestimmt. In dieser Halbebene liegen die dritten Eckpunkte der Dreiecke bzw. die zweiten Schenkel der Winkel.
- ▶ Dies verdeutlicht noch einmal, dass für Winkel wie für Dreiecke nur zwei Orientierungen möglich sind und diese Orientierungen bei gleichsinnigen Kongruenzabbildungen erhalten bleiben und bei nicht gleichsinnigen Kongruenzabbildungen umgekehrt werden.
- ▶ Zur Unterscheidung der beiden Orientierungen nennt man die Orientierung *gegen den Uhrzeigersinn* **mathematisch positiv**.

## Definition 2.9

- ▷ In der Ebene  $\varepsilon$  sei die Gerade  $g$  mit  $P, Q \in g$  durch die Festlegung  $P < Q$  orientiert. Es sei
- ▷  $g_k$  eine beliebige Parallel zu  $g$ ,
  - ▷  $h$  eine Gerade, die  $g$  in  $P$  und  $g_k$  in  $P_k$  schneidet,
  - ▷  $Q_k$  ein weiterer Punkt von  $g_k$  mit  $P_k < Q_k$ .

Die Geraden  $g$  und  $g_k$  heißen genau dann **gleichorientiert**, wenn die Punkte  $Q$  und  $Q_k$  in derselben Halbebene bzgl.  $h$  liegen.

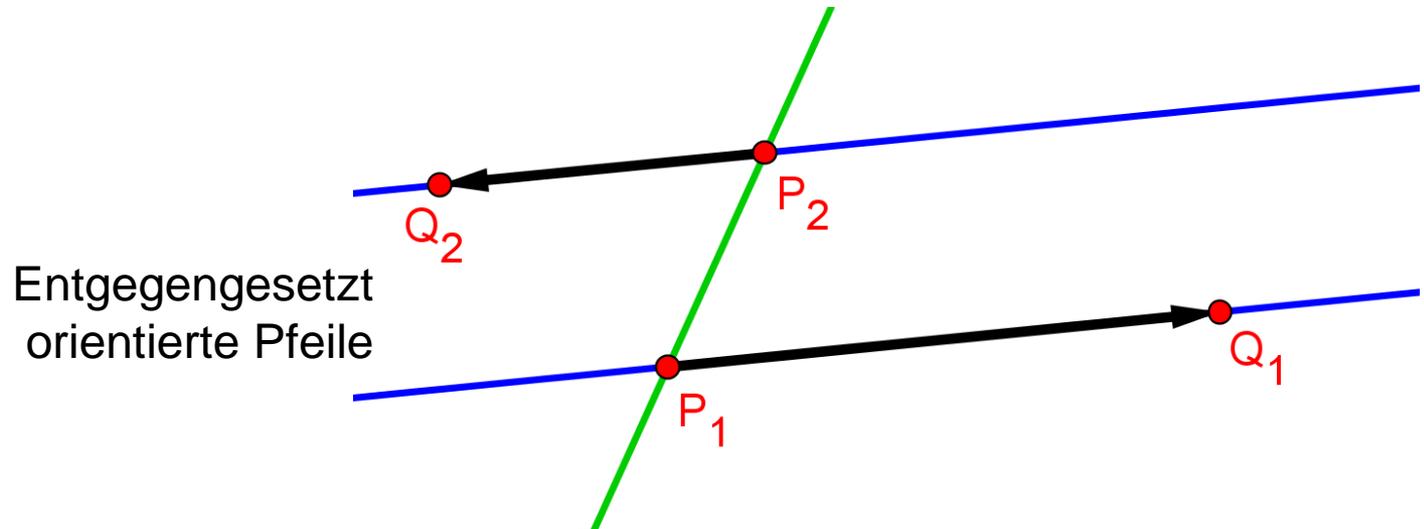
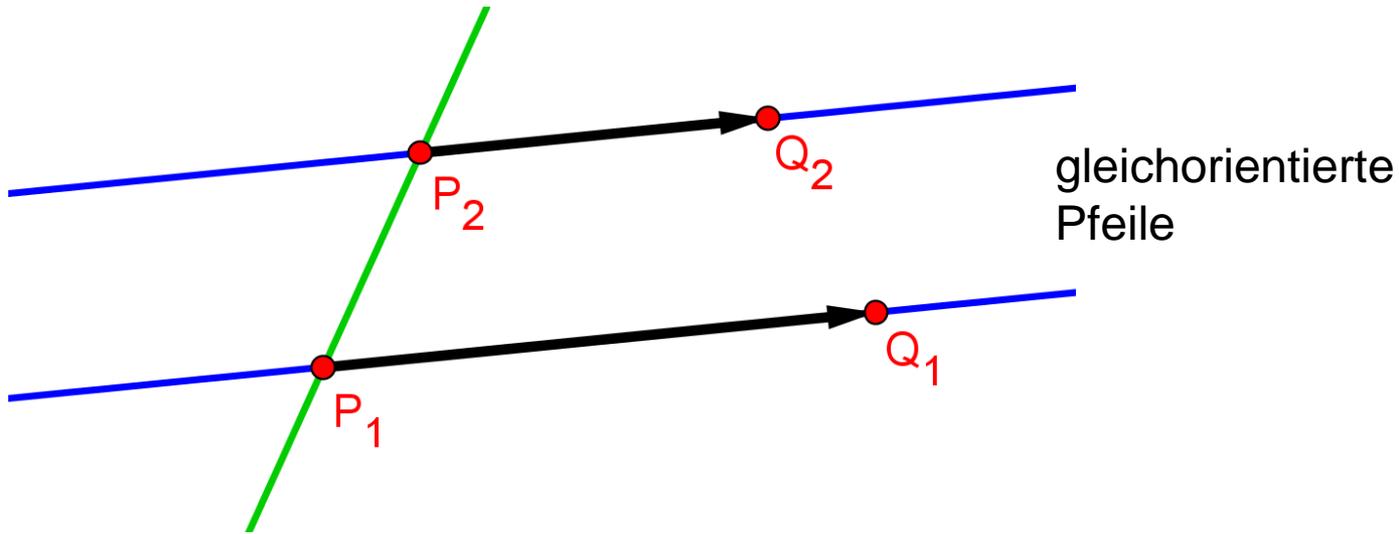


## Definition 2.10

- ▷ Ein **Pfeil** ist ein geordnetes Paar von Punkten.
- ▷ Sind zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben, dann wird der Pfeil  $\overrightarrow{PQ} := (P, Q)$  **Gegenpfeil** des Pfeils  $\overrightarrow{QP} := (Q, P)$  genannt.

## Definition 2.11

- ▷ Zwei Pfeile  $\overrightarrow{P_1Q_1}$  und  $\overrightarrow{P_2Q_2}$  bzw. Halbgeraden  $[P_1Q_1$  und  $[P_2Q_2$  auf zueinander parallelen Trägergeraden heißen genau dann **gleichorientiert**, wenn bei gleicher Orientierung der Trägergeraden gilt:
 
$$P_1 < Q_1 \quad \Leftrightarrow \quad P_2 < Q_2$$
- ▷ Andernfalls heißen die Pfeile oder Halbgeraden **entgegengesetzt orientiert**.



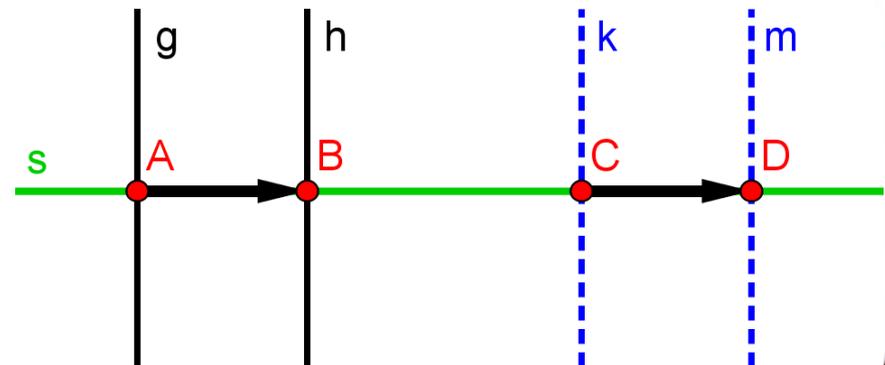
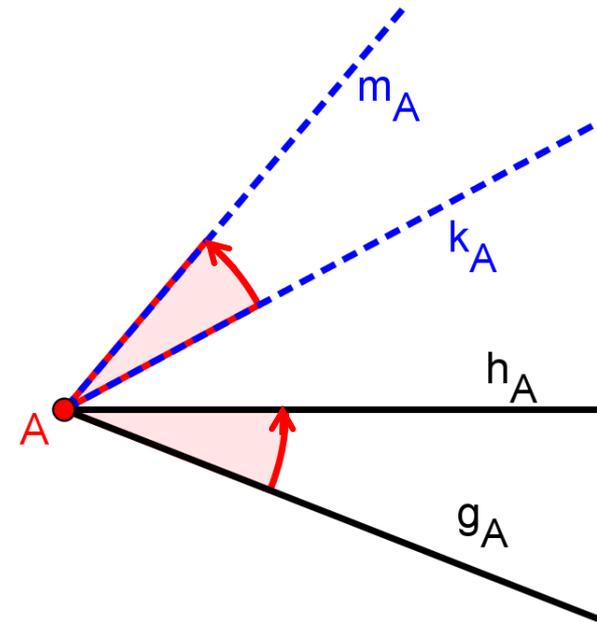
## ► Bemerkungen

- ▶ Wegen der streng linearen Anordnung der Punkte einer Geraden, gibt es nur genau zwei Orientierungen für alle Halbgeraden bzw. alle Pfeile auf parallelen Trägergeraden.
- ▶ Bezogen auf eine solche Parallelenschar ist die Relation „gleichorientiert“ eine Äquivalenzrelation.
- ▶ An einem Gegenbeispiel kann man sich leicht klar machen, dass es sinnlos wäre, den Orientierungsvergleich auf den Fall *nicht* paralleler Trägergeraden auszudehnen. Dies würde zu einer nicht transitiven Relation führen, also auf einen Widerspruch zum üblichen Verständnis von „gleich“ im Wort „gleichorientiert“.

## Satz 2.17

Für vier Geraden  $g, h, k$  und  $m$  der Ebene  $\varepsilon$  mit  $S_h \circ S_g = S_m \circ S_k$  gilt:

- Ist  $g \cap h \cap k \cap m = \{A\}$ , dann gibt es nicht überstumpfe Winkel  $\sphericalangle(g_A, h_A)$  und  $\sphericalangle(k_A, m_A)$ , die **gleichorientiert und kongruent** sind.
- Ist  $g \parallel h \parallel k \parallel m$  und ist  $s$  eine Senkrechte zu diesen Geraden, die  $g$  in  $A$ ,  $h$  in  $B$ ,  $k$  in  $C$  und  $m$  in  $D$  schneidet, dann sind die Pfeile  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  **gleichorientiert und kongruent**.



► **Beweis von Satz 2.17a:** (Beweis von Satz 2.17b analog)

(1) Es gilt:  $g \cap h \cap k \cap m = \{A\} \wedge S_h \circ S_g = S_m \circ S_k$

(2) Betrachte  $P \in g_A$  und  $Q \in k_A$  mit  $[AP] \cong [AQ]$ .

(3)  $w$  ist die Symmetrieachse von  $P$  und  $Q$ .

(4) Wegen (2), (3) und Satz 1.13 ist  $A \in w$ .

(5)  $(S_k \circ S_w)(P) = S_k(S_w(P)) \stackrel{(3)}{=} S_k(Q) \stackrel{Q \in k}{=} Q$

(6) Mit (1) folgt:  $(S_h \circ S_g)(P) = (S_m \circ S_k)(P) = P' \wedge$   
 $(S_h \circ S_g)(Q) = (S_m \circ S_k)(Q) = Q'$

(7) Aus (3), (2) und (6) ergibt sich:

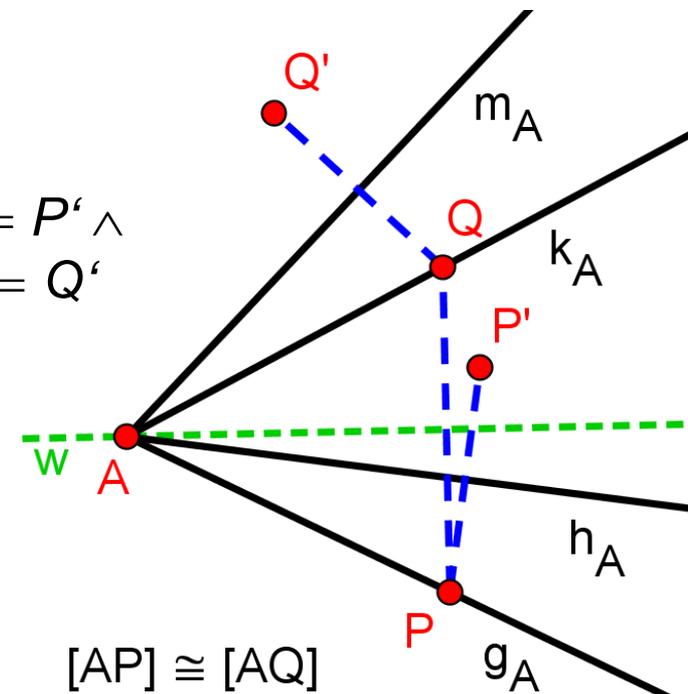
$$(S_h \circ S_g \circ S_w)(Q) = P'$$

(8) Da  $S_h \circ S_g \circ S_w$  nach Satz 2.12 eine Achsenspiegelung ist folgt:

$$(S_h \circ S_g \circ S_w)(P') = Q$$

(9) Wegen  $S_h \circ S_g = S_m \circ S_k$  gilt dann:

$$(S_m \circ S_k \circ S_w)(P') = Q$$



► **Beweis von Satz 2.17a:**

$$(9) \quad (S_m \circ S_k \circ S_w)(P^\wedge) = Q$$

(10) Daraus folgt:

$$(S_m \circ S_m \circ S_k \circ S_w)(P^\wedge) = (S_k \circ S_w)(P^\wedge)$$

und

$$\begin{aligned} (S_m \circ S_m \circ S_k \circ S_w)(P^\wedge) &= S_m((S_m \circ S_k \circ S_w)(P^\wedge)) \\ &\stackrel{(9)}{=} S_m(Q) \stackrel{(6)}{=} Q' \end{aligned}$$

also  $(S_k \circ S_w)(P^\wedge) = Q'$

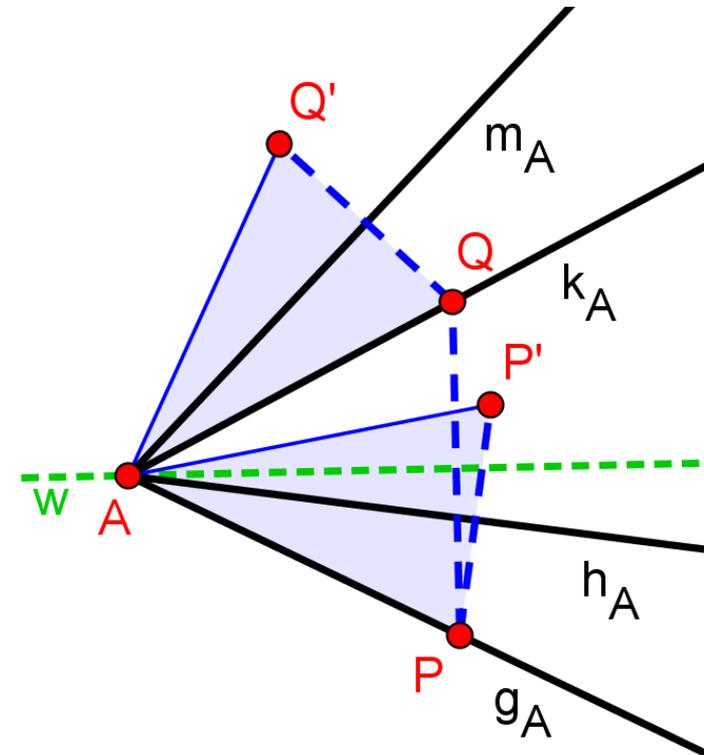
(11) Es folgt:  $(S_k \circ S_w)(PAP^\wedge) = (QAQ^\wedge)$ ,

wobei  $(PAP^\wedge)$  und  $(QAQ^\wedge)$  gleichorientiert sind.

Damit gilt auch:  $\sphericalangle(PAP^\wedge) \cong \sphericalangle(QAQ^\wedge)$  und gleichorientiert [S. 2.63]

(12) Da  $h$  die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle(PAP^\wedge)$  und  $m$  die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle(QAQ^\wedge)$  ist, gilt auch  $(S_k \circ S_w)(h) = m$ .

(13) Also ist  $\sphericalangle(g_A, h_A)$  gleichorientiert und kongruent zu  $\sphericalangle(k_A, m_A)$ . #

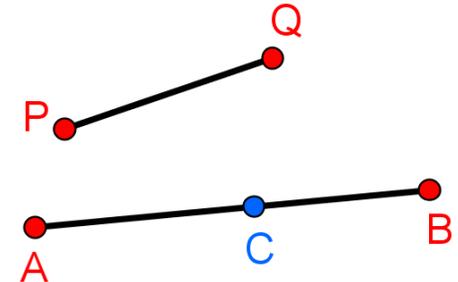


Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

## **2.4 Kleinerrelation und Addition für Längen und Winkelgrößen**

## Definition 2.12

- ▷ Die Länge  $|PQ|$  der Strecke  $[PQ]$  mit  $P \neq Q$  heißt genau dann **kleiner** als die Länge  $|AB|$  der Strecke  $[AB]$ , wenn es einen Punkt  $C$  gibt mit  $A-C-B$  und  $[PQ] \cong [AC]$ .
- ▷ Man schreibt dann:  $|PQ| < |AB|$



## Satz 2.18

Die Relation „ $<$ “ ist eine **strenge Ordnungsrelation** für Streckenlängen.

Es gilt also für beliebige Punkte  $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{P}$ :

- ▷  $|AB| < |CD| \Rightarrow \neg(|CD| < |AB|)$  (**Asymmetrie**)
- ▷  $|AB| < |CD| \wedge |CD| < |EF| \Rightarrow |AB| < |EF|$  (**Transitivität**)

Anmerkung:  
Asymmetrie umfasst  
Antisymmetrie und  
Irreflexivität.

## Definition 2.13

- ▷ Sind  $A, B, C$  drei kollineare Punkte mit  $A-B-C$ , dann ist  $|AC|$  die Summe der Streckenlängen  $|AB|$  und  $|BC|$ .
- ▷ Man schreibt:  $|AB| + |BC| = |AC|$
- ▷ Für  $|PP|$ , die Länge der Nullstrecke, gilt:

$$|AB| + |PP| = |PP| + |AB| = |AB|$$

## Satz 2.19

Die Menge  $\mathbb{L}$  aller Streckenlängen bildet bzgl. der Addition eine kommutative Halbgruppe  $(\mathbb{L}, +)$ , es gilt also für alle Streckenlängen  $|AB|, |CD|, |EF| \in \mathbb{L}$ :

- ▷  $|AB| + |CD| \in \mathbb{L}$  (**Abgeschlossenheit**)
- ▷  $(|AB| + |CD|) + |EF| = |AB| + (|CD| + |EF|)$  (**Assoziativität**)
- ▷  $|AB| + |CD| = |CD| + |AB|$  (**Kommutativität**)

## Satz 2.20

Die Relation  $|AB| < |CD|$  gilt genau dann, wenn es eine Streckenlänge  $|PQ|$  mit  $P \neq Q$  gibt, so dass gilt:

$$|AB| + |PQ| = |CD|$$

## ► Bemerkung

- Für die Längen lässt sich das Vervielfachen einer Größe mit einer natürlichen Zahl durch fortgesetzte Addition erklären. Damit erhalten Ausdrücke wie „doppelt so lang wie“ und „dreifache Länge“ eine wohldefinierte Bedeutung.
- Da jede Strecke einen Mittelpunkt besitzt, ist für jede Strecke auch erklärt, was unter der Hälfte, einem Viertel oder einem Achtel der Streckenlänge zu verstehen ist.

## Definition 2.14

- ▶ Ein Winkel  $\alpha$  heißt genau dann **kleiner** als ein Winkel  $\beta$ , wenn es eine Kongruenzabbildung  $\varphi$  gibt, die  $\alpha$  so abbildet, dass gilt:
  - ▶  $\varphi(\alpha)$  hat denselben ersten Schenkel wie  $\beta$  und
  - ▶  $\varphi(W_\alpha) \subset W_\beta$
- ▶ Man schreibt kurz:  $\alpha < \beta$



## Definition 2.15

- ▶ Die Größe eines Winkels  $\alpha$  ist die Äquivalenzklasse aller zu  $\alpha$  kongruenten Winkel.
- ▶ Man schreibt  $|\alpha|$  für die Größe eines Winkels  $\alpha$ . Häufig wird allerdings auch die Größe eines Winkels  $\alpha$  mit  $\alpha$  bezeichnet. Was gemeint ist, ergibt sich dann aus dem Zusammenhang.

# Addition von Winkelgrößen gleichorientierter Winkel

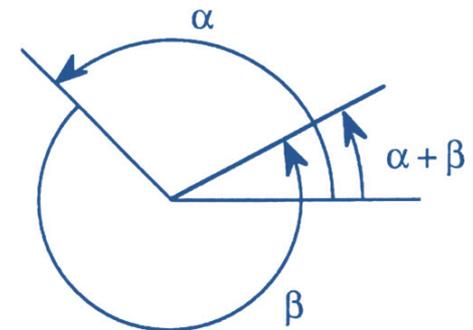
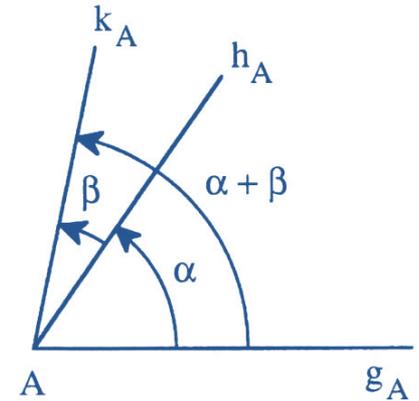
## Definition 2.16

- ▷ Die Größe eines Winkels  $\alpha$  ist genau dann **kleiner** als die Größe eines Winkels  $\beta$ , wenn für die Winkel gilt:  $\alpha < \beta$

## Definition 2.17

- ▷ Sind  $\sphericalangle(g_A, h_A)$  und  $\sphericalangle(h_A, k_A)$  zwei gleichorientierte Winkel, dann ist die Größe des genauso orientierten Winkels  $\sphericalangle(g_A, k_A)$  die **Summe** der beiden Winkelgrößen.

$$|\sphericalangle(g_A, h_A)| + |\sphericalangle(h_A, k_A)| = |\sphericalangle(g_A, k_A)|$$



## Satz 2.21

Die Menge aller positiv (negativ) orientierten Winkelgrößen bildet bezüglich der Addition eine Gruppe.

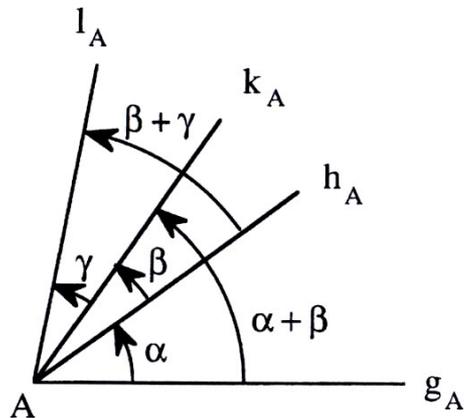
# Addition von Winkelgrößen gleichorientierter Winkel

## Beweisidee zu Satz 2.21:

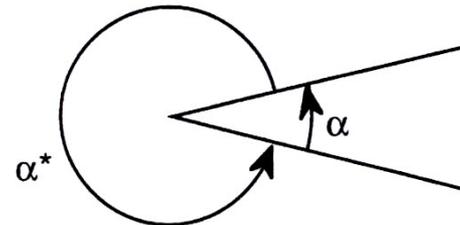
**a) Abgeschlossenheit**  
Folgt aus Definition 2.17

**c) Neutrales Element**  
Nullwinkel

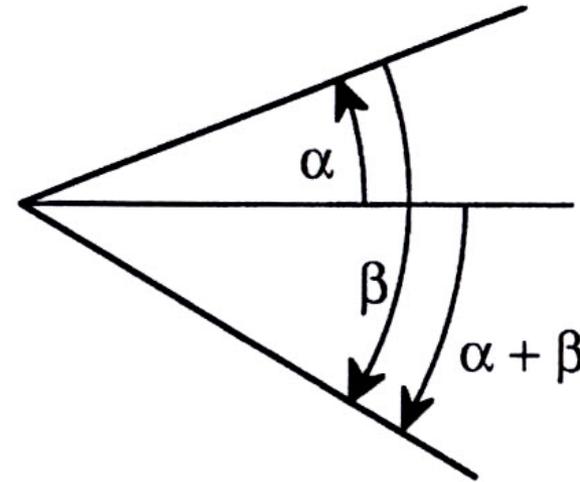
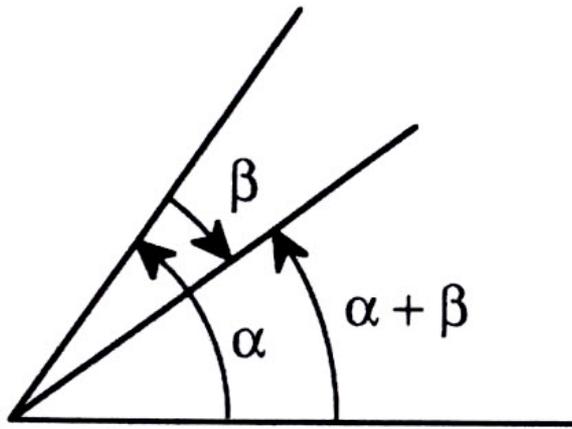
**b) Assoziativität**



**d) Inverses Element zu  $\alpha$**   
Komplementärer  
gleichorientierter Winkel  $\alpha^*$



# Addition von Winkelgrößen beliebiger Winkel



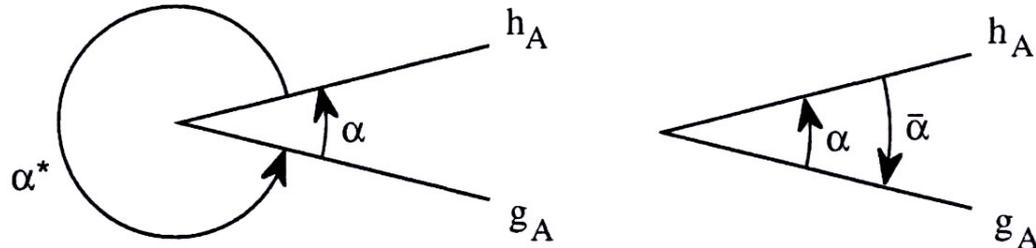
## Definition 2.18

- ▷ Sind  $\sphericalangle(g_A, h_A)$  und  $\sphericalangle(h_A, k_A)$  beliebig orientierte Winkel, dann heißt die Größe des Winkels  $\sphericalangle(g_A, k_A)$ , der wie der größere der beiden Winkel orientiert ist, **Summe** der beiden Winkelgrößen  $|\sphericalangle(g_A, h_A)|$  und  $|\sphericalangle(h_A, k_A)|$ .

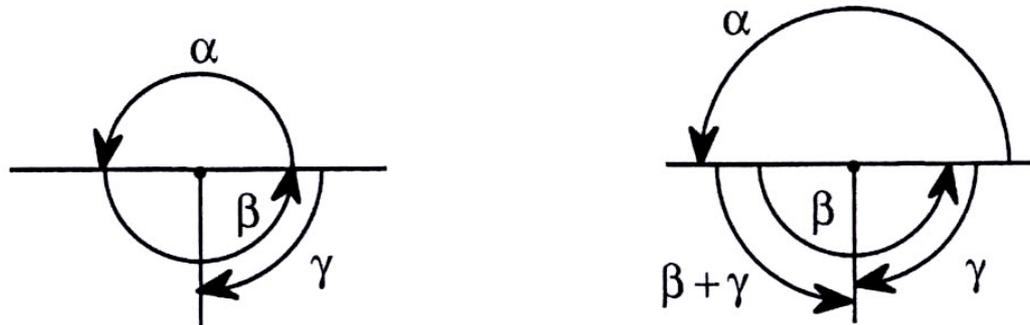
$$|\sphericalangle(g_A, h_A)| + |\sphericalangle(h_A, k_A)| = |\sphericalangle(g_A, k_A)|$$

# Addition von Winkelgrößen beliebiger Winkel

- ▶ Kein eindeutig bestimmtes inverses Element zu  $\alpha$



- ▶ Nicht assoziativ  $(\alpha + \beta) + \gamma \neq \alpha + (\beta + \gamma)$



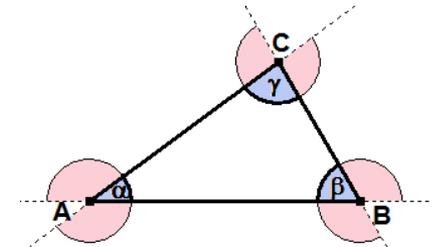
## Satz 2.22

Die Addition von Winkelgrößen ist kommutativ.

Für alle Winkelgrößen  $\alpha$  und  $\beta$  gilt immer:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

## ► Bemerkung

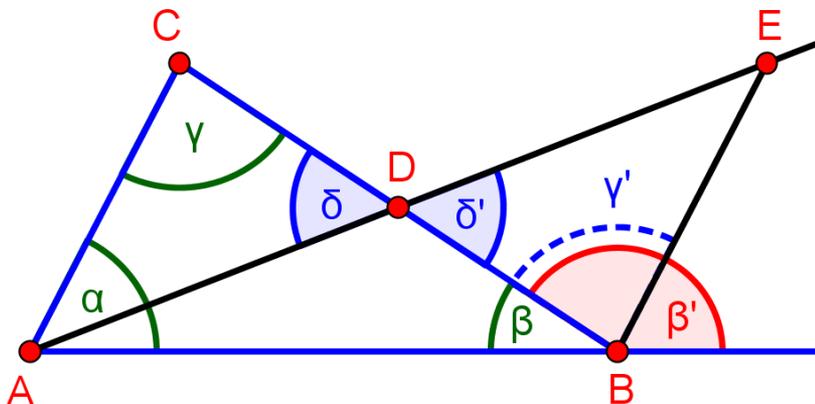
- Jeder Nebenwinkel eines Innenwinkels eines Dreiecks heißt Außenwinkel des Dreiecks.



## Satz 2.23

Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist immer größer als jeder Innenwinkel, der nicht sein Nebenwinkel ist.

## ► Beweis



$[BD] \cong [DC]$  (D ist Mittelpunkt von  $[BC]$ .)

$[AD] \cong [DE]$  (Streckenabtragung)

$\delta \cong \delta'$  (Scheitelwinkel)

---

$\triangle ADC \cong \triangle EDB$  (SWS-Satz)

Daraus folgt:  $\gamma \cong \gamma'$

Da E im Winkelfeld von  $\beta'$  liegt (Warum?) gilt mit Definition 2.14  $\gamma' < \beta'$  und damit wegen  $\gamma \cong \gamma'$  auch  $\gamma < \beta'$ .

Analog für die anderen Winkel.

#



## Satz 2.24

In einem Dreieck liegt immer die größere Seite dem größeren Winkel gegenüber und umgekehrt.

### ► Beweis

a) O.B.d.A. zu zeigen:  $|BC| < |AB| \Rightarrow \alpha < \gamma$

$$|BC| < |AB|$$

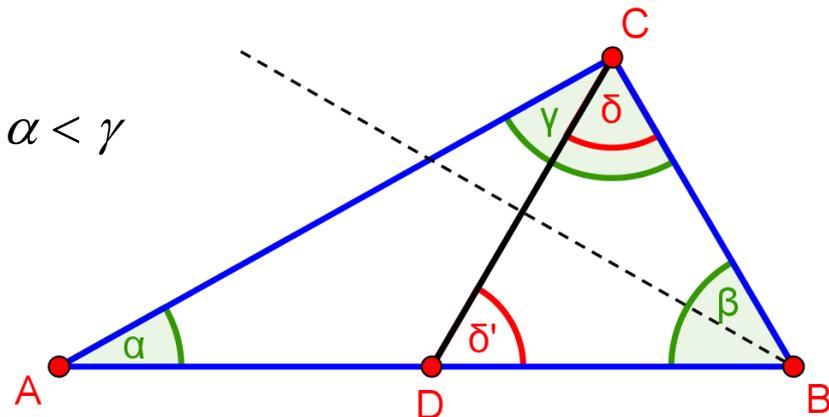
Def. 2.12  
 $\Rightarrow \exists_{D \in [AB]} A-D-B \wedge [DB] \cong [BC]$

Satz 1.13  
 $\Rightarrow B \in m_{[DC]} = m$

$$\Rightarrow S_m(\delta) = \delta' \Rightarrow \delta \cong \delta' \quad (*)$$

Da  $[CD]$  im Winkelfeld von  $\gamma$  liegt, folgt mit Def. 2.14  $\delta < \gamma$   
 und wegen  $(*)$  auch  $\delta' < \gamma$   $(**)$ . Nach Satz 2.23 gilt:  $\alpha < \delta'$   $(+)$

Mit  $(+)$  und  $(**)$  folgt:  $\alpha < \gamma$



#



## ► Beweis zu 2.24 (Fortsetzung)

b) O.B.d.A. zu zeigen:  $\alpha < \gamma \Rightarrow |BC| < |AB|$

Annahme:  $\alpha < \gamma \wedge |AB| \leq |BC|$

1. Fall:

$|AB| < |BC| \stackrel{a)}{\Rightarrow} \gamma < \alpha$  ✨ **Widerspruch zur Voraussetzung  $\alpha < \gamma$**

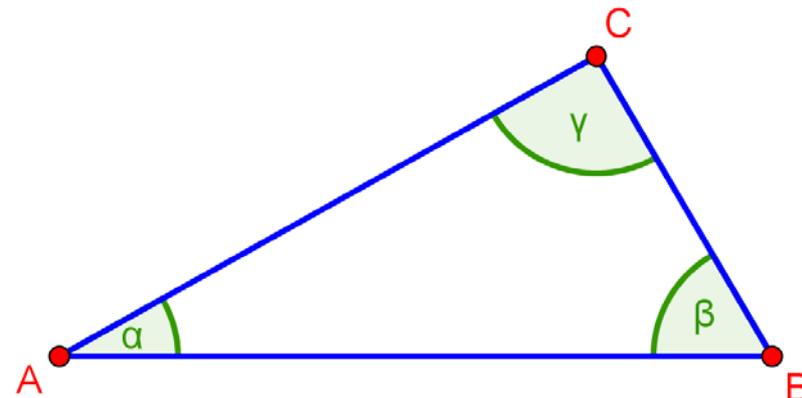
2. Fall:

$$|AB| = |BC|$$

Satz 1.13  
 $\Rightarrow B \in m_{[AC]} = n$

$$\Rightarrow S_n(\gamma) = \alpha$$

$\Rightarrow \gamma \cong \alpha$  ✨ **Widerspruch zur Voraussetzung  $\alpha < \gamma$**



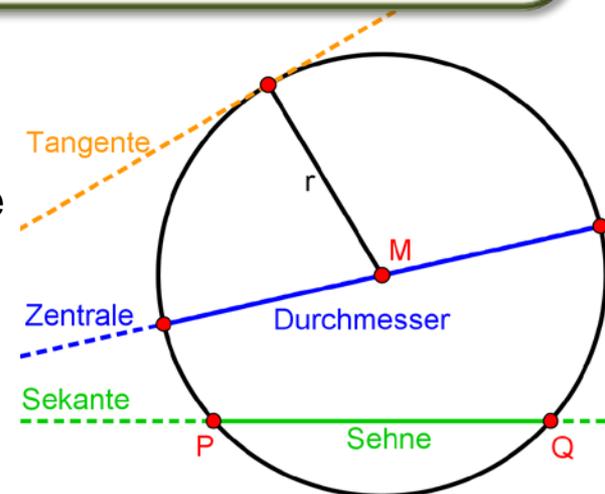
Also ist die Annahme falsch und deren Gegenteil, die Aussage  $\alpha < \gamma \Rightarrow |BC| < |AB|$  ist richtig. #

## Definition 2.19

- ▶ Ist ein Punkt  $M$  der Ebene  $\varepsilon$  und eine Streckenlänge  $r$  gegeben, dann heißt die Punktmenge  $k(M, r) := \{P \in \varepsilon \mid |MP| = r\}$  **Kreis** um den **Mittelpunkt**  $M$  mit dem **Radius**  $r$ .
- ▶ Die Punktmenge  $k_i(M, r) := \{P \in \varepsilon \mid |MP| < r\}$  heißt **Inneres**, die Punktmenge  $k_a(M, r) := \{P \in \varepsilon \mid |MP| > r\}$  heißt **Äußeres** des Kreises  $k(M, r)$ .

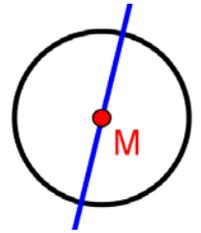
## ▶ Bezeichnungen

- ▶ Die Gerade  $PQ$  durch zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  eines Kreises heißt **Sekante**, die Strecke  $[PQ]$  auf der Sekanten heißt **Sehne** des Kreises.
- ▶ Eine Sekante, die durch den Kreismittelpunkt verläuft heißt **Zentrale**, die zugehörige Sehne heißt **Durchmesser**.
- ▶ Eine Gerade, die genau einen Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat heißt **Tangente**, der gemeinsame Punkt heißt **Berührungspunkt**.



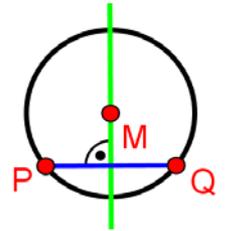
## Satz 2.25

Ein Kreis  $k(M, r)$  wird durch jede Geradenspiegelung an einer seiner Zentralen auf sich selbst abgebildet.



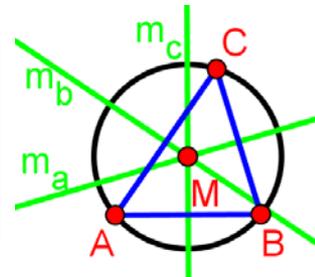
## Satz 2.26

Die Mittelsenkrechte jeder Sehne eines Kreises  $k(M, r)$  verläuft durch den Kreismittelpunkt  $M$ .



## Satz 2.27

Ein Kreis ist durch drei verschiedene, nicht kollineare Punkte eindeutig bestimmt. (Hinweis: Mittelpunkt und Radius)



## Satz 2.28

Die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem *Umkreismittelpunkt*.

**Beweise**  
Übungs-  
aufgaben

## Satz 2.29

- Die Mittelpunkte aller Kreise, die sich in zwei Punkten  $P$  und  $Q$  schneiden, liegen auf der Mittelsenkrechten  $m_{[PQ]}$  von  $[PQ]$ .
- Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten.
- Eine Gerade und ein Kreis schneiden sich in höchstens zwei Punkten.

## ► Beweis

a)  $P, Q \in k(M, r)$

$\stackrel{\text{Def. 2.19}}{\Rightarrow} |MP| = |MQ| = r$

$\stackrel{\text{Def. 1.15}}{\Rightarrow} [MP] \cong [MQ]$

$\stackrel{\text{Satz 1.13}}{\Rightarrow} M \in m_{[PQ]}$ , der Symmetrieachse von  $P$  und  $Q$ .

$\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} (P, Q \in k_n(M_n, r_n) \Rightarrow M_n \in m_{[PQ]})$

#

b) Übungsaufgabe

c) Übungsaufgabe



Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.5 Typen von Kongruenzabbildungen

## ► Bemerkungen

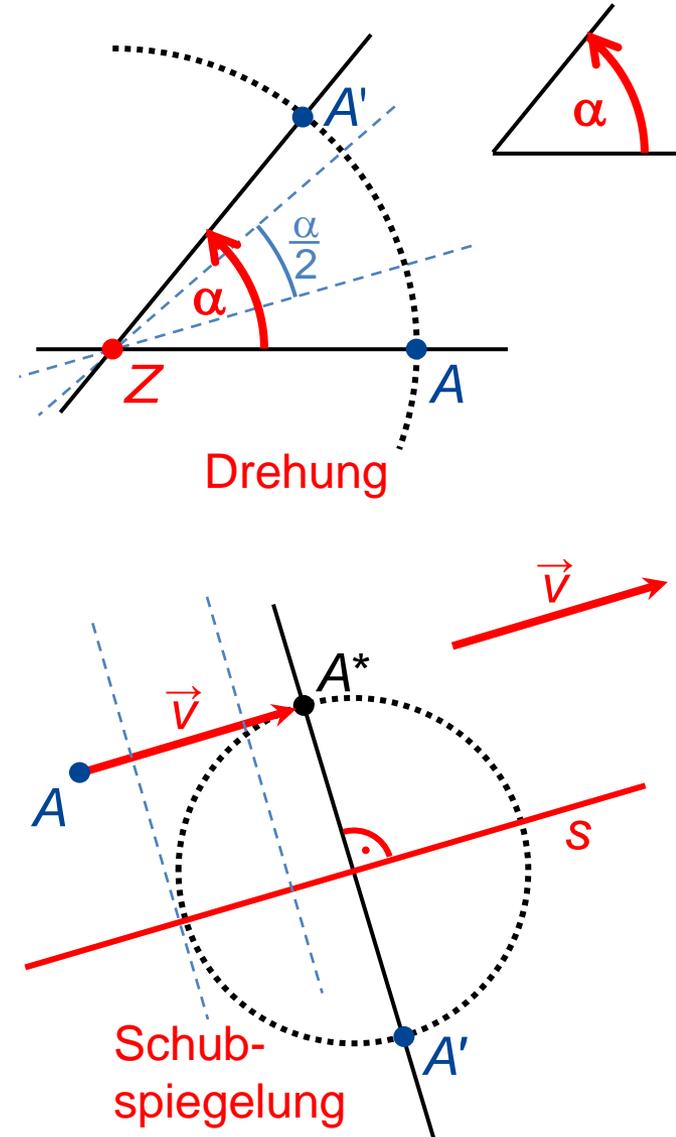
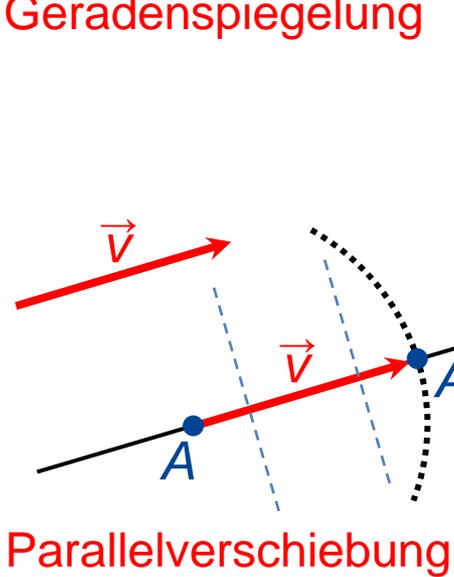
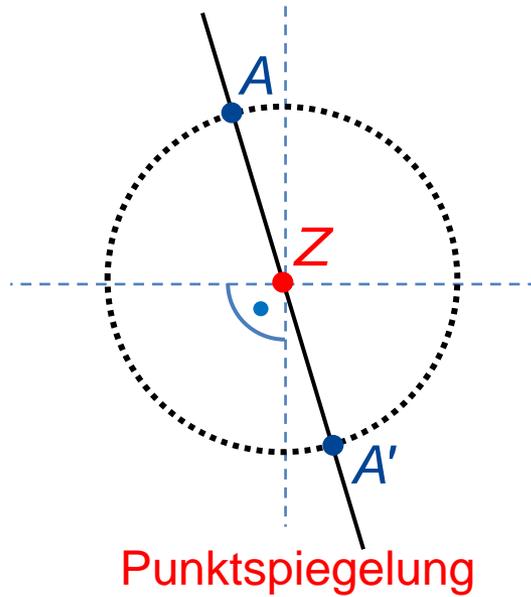
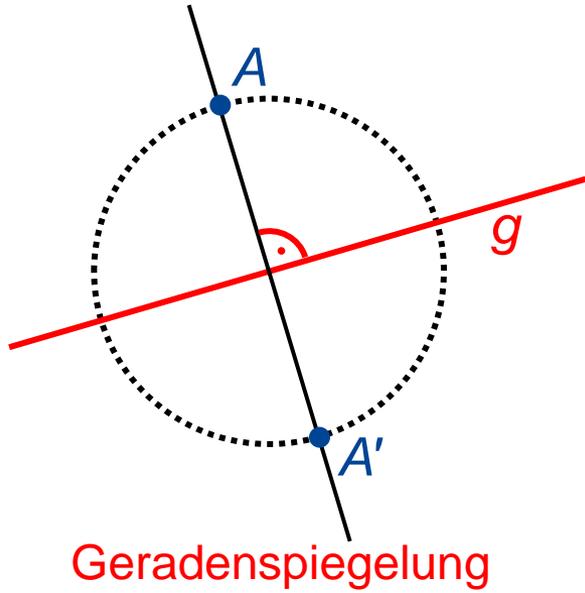
- ▷ Mit dem Dreispiegelungssatz (Satz 2.4) wurde bewiesen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch die Verkettung von höchstens drei Geradenspiegelungen ersetzen lässt.
- ▷ Die Kongruenzabbildungen können in
  - **gleichsinnige Kongruenzabbildungen**, die alle als Verkettung von genau zwei Geradenspiegelungen darstellbar sind (*Verschiebungen*, *Drehungen* und als Spezialfall *Punktspiegelungen*) und

- **ungleichsinnige Kongruenzabbildungen**, also die *Geradenspiegelungen* und die Verkettungen aus drei Geradenspiegelungen (*Schubspiegelungen*)

unterteilt werden.

- ▷ Bei den gleichsinnigen Kongruenzabbildungen können die beiden Geraden parallel sein (Verschiebung) oder sich schneiden (Drehung). Falls sie sich schneiden ist noch der Sonderfall möglich, dass sie senkrecht aufeinander stehen (Punktspiegelung).
- ▷ Es gibt also insgesamt 5 Typen von Kongruenzabbildungen.

# Typen von Kongruenzabbildungen

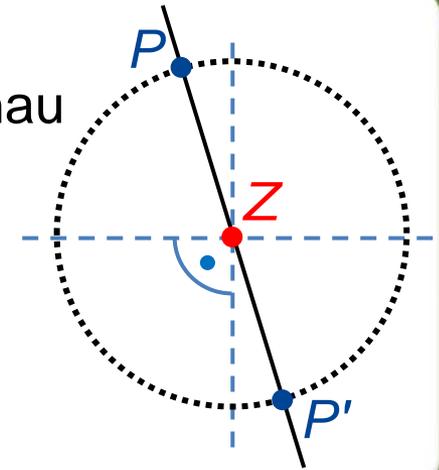


Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

## **2.6 Punktspiegelung (Halbdrehung)**

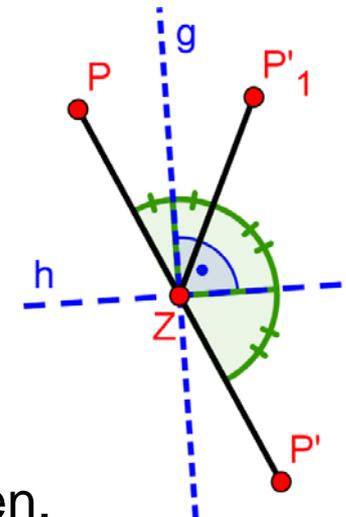
## Definition 2.20

- ▷ Eine Abbildung  $P_Z$  der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt genau dann **Punktspiegelung** (Halbdrehung), wenn sie
  - ▶ genau einen Fixpunkt  $Z$  besitzt und
  - ▶ jedem Punkt  $P$  den Bildpunkt  $P'$  so zuordnet, dass  $Z$  der Mittelpunkt der Strecke  $[PP']$  ist.
- ▷  $Z$  heißt das **Zentrum** der Punktspiegelung  $P_Z$ .



## Satz 2.30

- Die Verkettung  $S_h \circ S_g$  zweier Geradenspiegelungen  $S_g$  und  $S_h$  an zueinander senkrechten Geraden  $g$  und  $h$  mit dem Schnittpunkt  $Z$  ist gleich der Punktspiegelung  $P_Z$  am Schnittpunkt  $Z$ .
- Jede Punktspiegelung  $P_Z$  ist darstellbar als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden, die sich in  $Z$  schneiden.





## ► Bemerkung

- ▷ Da jede Strecke  $[PQ]$  genau einen Mittelpunkt besitzt, gilt:

### Satz 2.31

Zu zwei Punkten  $P$  und  $Q$  gibt es genau eine Punktspiegelung, die  $P$  auf  $Q$  abbildet.

### Satz 2.32

Die Punktspiegelung ist eine involutorische Abbildung, d. h. sie ist zu sich selbst invers.

## ► Beweis

- ▷  $Z$  ist Mittelpunkt der Strecke  $[PP']$  und  $P_Z(P) = P'$ .
- ▷ Wegen  $[PP'] = [P'P]$  kann auch  $P'$  als Urbild betrachtet werden und es gilt mit Definition 2.20:  $P_Z(P') = P$ . Damit ergibt sich:
- ▷  $\forall_{P \in \varepsilon} (P_Z \circ P_Z)(P) = P_Z(P_Z(P)) = P_Z(P') = P \Leftrightarrow P_Z \circ P_Z = id_\varepsilon \quad \#$

## Satz 2.33

In einer Verkettung  $S_h \circ S_g$  sind die beiden Geradenspiegelungen  $S_h$  und  $S_g$  genau dann vertauschbar, wenn  $g = h$  oder  $g \perp h$  ist.

Kurz:  $S_h \circ S_g = S_g \circ S_h \Leftrightarrow g = h \vee g \perp h$

## Satz 2.34

Punktspiegelungen sind geradentreu, längentreu und winkelmaßtreu.

### ► Beweis

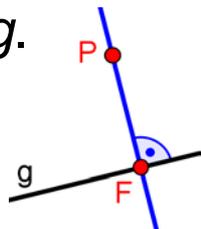
► Diese Eigenschaften ergeben sich sofort aus Satz 2.30 und den Eigenschaften der Geradenspiegelung.

### ► Bemerkung

►  $d(P, g)$  ist der **Abstand** von einem Punkt  $P$  zu einer Geraden  $g$ .

► Das von  $P$  auf  $g$  gefällte Lot schneidet  $g$  im Lotfußpunkt  $F$ .

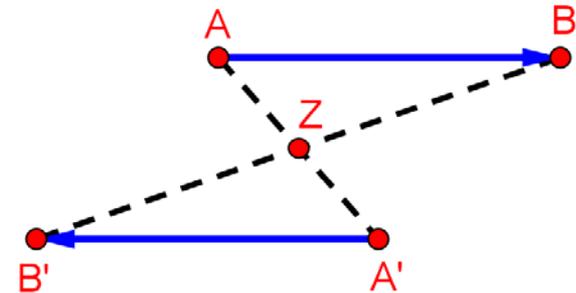
► Es gilt:  $d(P, g) = |PF|$



## Satz 2.35: Eigenschaften der Punktspiegelung

Für jede Punktspiegelung  $P_Z$  in der Ebene  $\varepsilon$  gilt:

- Jede Gerade durch das Zentrum  $Z$  ist Fixgerade.
- Eine beliebige Gerade  $g$  wird auf eine zu  $g$  parallele Gerade  $g'$  abgebildet.
- Eine Gerade  $g$  und ihre Bildgerade  $g'$  sind entgegengesetzt orientiert und haben denselben Abstand vom Zentrum  $Z$ .
- Ein Pfeil  $\overrightarrow{AB}$  wird auf einen kongruenten und entgegengesetzt orientierten Pfeil  $\overrightarrow{A'B'}$  abgebildet.



### ► Beweis

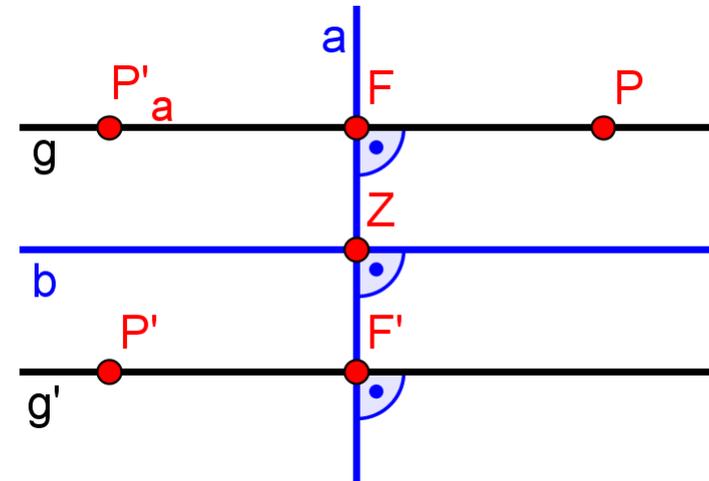
- Übungsaufgabe
- Übungsaufgabe

## ► Beweis zu Satz 2.35c

- ▷ Die Punktspiegelung  $P_Z$  wird durch die Verkettung  $S_b \circ S_a$  ersetzt mit  $a \perp g$  und folglich  $b \parallel g$ .
- ▷  $F$  ist Fußpunkt des Lotes von  $Z$  auf  $g$  und  $P$  ein Punkt auf  $g$  mit  $P \neq F$  und  $F < P$ .
- ▷  $S_a(g) = g \wedge S_b(g) = g'$
- ▷  $S_a(P) = P'_a < F = S_a(F)$ , d. h. die Orientierung hat sich geändert.
- ▷  $S_b(P'_a) = P' < F' = S_b(F)$
- ▷ Die Bildgerade  $g'$  ist also entgegengesetzt zu  $g$  orientiert.
- ▷ Wegen  $[ZF] \cong [ZF']$  ergibt sich außerdem:

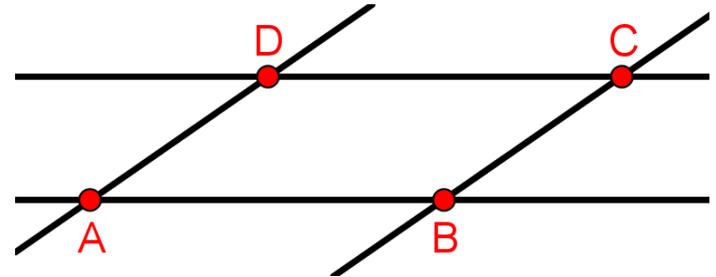
$$d(Z, g) = |ZF| = |ZF'| = d(Z, g') \quad \#$$

- ▷ **Bemerkung:** Die Umkehrung der Orientierung für Pfeile und die Kongruenz von Pfeil und Bildpfeil (Satz 2.35d) lässt sich direkt aus obigem Beweis folgern.



## Definition 2.21

- ▷ Ein Viereck in einer Ebene  $\varepsilon$ , bei dem gegenüberliegende Seiten auf paarweise parallelen Trägergeraden liegen, heißt **Parallelogramm**.

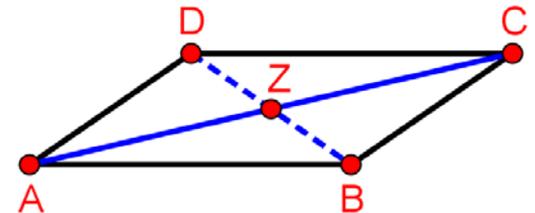


## Definition 2.22

- ▷ Eine Figur heißt genau dann **punktsymmetrisch**, wenn sie durch eine Punktspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann.

## Satz 2.36

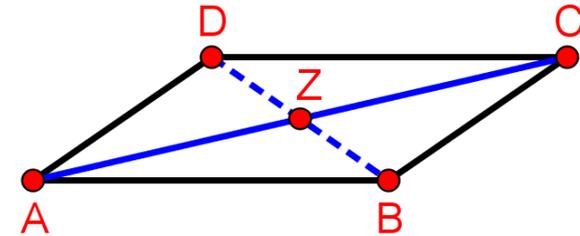
Ein Parallelogramm ist punktsymmetrisch bzgl. des Diagonalschnittpunkts als Zentrum.



- ▶ **Bemerkung:** Es lässt sich auch zeigen, dass jedes punktsymmetrische Viereck ein Parallelogramm ist.

## ► Beweis zu Satz 2.36

$ABCD$  ist ein Parallelogramm und  $Z$  der Mittelpunkt seiner Diagonale  $[AC]$ .



$$\begin{array}{l} \text{Def. 2.20} \\ \Rightarrow \end{array} P_Z(A) = C$$

$$\begin{array}{l} \text{Satz 2.32} \\ \Rightarrow \end{array} P_Z(C) = A \quad (P_Z \text{ ist involutorisch.})$$

$$\begin{array}{l} \text{Satz 2.35b} \\ \Rightarrow \end{array} P_Z(AB) \parallel AB \wedge C \in P_Z(AB)$$

$$\begin{array}{l} \text{Satz 2.34} \\ \text{P-Satz 1.23} \\ \Rightarrow \\ CD \parallel AB \end{array} P_Z(AB) = CD \quad (*)$$

Analog folgt:

$$P_Z(CB) = AD \quad (**)$$

$$B \in AB \cap CB$$

$$\begin{array}{l} \text{Satz 2.34} \\ \Rightarrow \end{array} P_Z(B) \in P_Z(AB) \cap P_Z(CB) \stackrel{(*)}{=} CD \cap AD = \{D\}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{Satz 2.32} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} P_Z(B) = D \\ P_Z(D) = B \end{array} \right\} \Rightarrow Z = M_{[BD]}$$

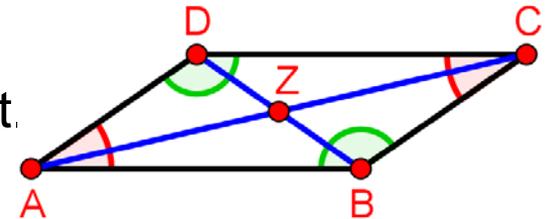
$$\Rightarrow P_Z(ABCD) = ABCD$$

#

## Satz 2.37

In jedem Parallelogramm gilt:

- Gegenüberliegenden Seiten sind kongruent.
- Die Diagonalen halbieren sich.
- Die gegenüberliegenden Innenwinkel sind kongruent.



► **Beweise:** Übungsaufgaben

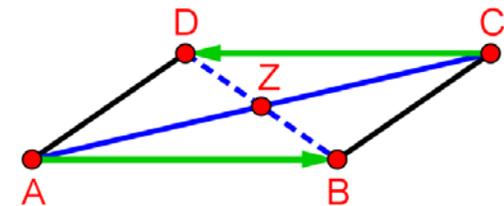
► **Bemerkung**

- ▷ Es gelten auch die Umkehrungen, d. h. jedes Viereck, das eine der drei im Satz genannten Eigenschaften besitzt, ist ein Parallelogramm.

**Beweis zu Satz 2.38:**  
Übungsaufgabe

## Satz 2.38

Ein orientiertes Viereck  $(ABCD)$  ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Pfeile  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  kongruent und entgegengesetzt orientiert sind.

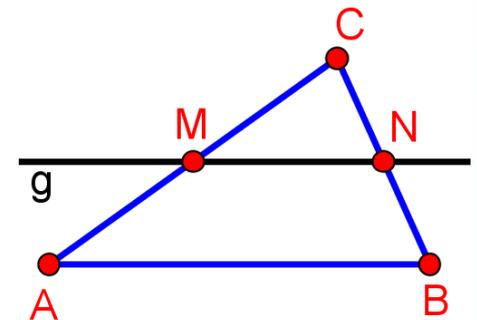


## Satz 2.39: Satz von der Mittelparallelen im Dreieck

a) Ist  $(ABC)$  ein Dreieck,  $M$  der Mittelpunkt der Seite  $[AC]$ , und  $g$  die Parallele zu  $AB$  durch  $M$ , dann gilt:

- ▶  $g$  trifft die Seite  $[BC]$  in ihrem Mittelpunkt  $N$ .
- ▶  $|MN|$  ist halb so lang wie  $|AB|$ .

b) Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel zur Trägergeraden der dritten Dreiecksseite.



### ▶ Beweis

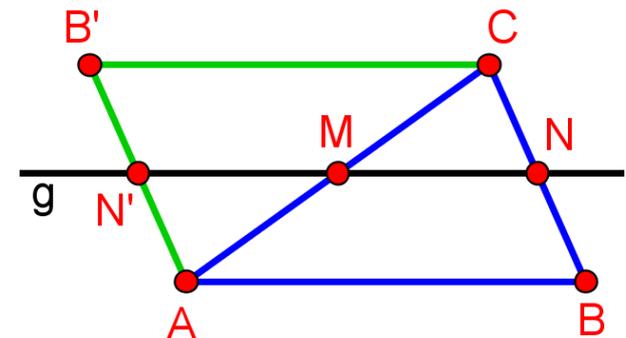
$$a) \quad g \cap ]AC[ = \{M\} \wedge g \parallel AB$$

$$\stackrel{(AP)/\text{Satz 1.5}}{\Rightarrow} \exists_{N \in ]BC[} g \cap ]BC[ = \{N\}$$

$$\stackrel{M = M_{[AC]}}{\Rightarrow} P_M(C) = A \wedge P_M(N) = N' \in g$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.35a}}{\Rightarrow} \stackrel{\text{Satz 2.34}}{\Rightarrow} P_M([CN]) = [AN']$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.35b}}{\Rightarrow} AN' \parallel CN \wedge [AN'] \cong [CN] (*) \Rightarrow ABNN' \text{ ist ein Parallelogramm.}$$



## ► Beweis zu Satz 2.39 (Fortsetzung)

$\Rightarrow ABNN'$  ist ein Parallelogramm.

Satz 2.37a  
 $\Rightarrow [AN'] \cong [BN] \wedge [AB] \cong [NN']$  (\*\*)

Mit (\*) ergibt sich:

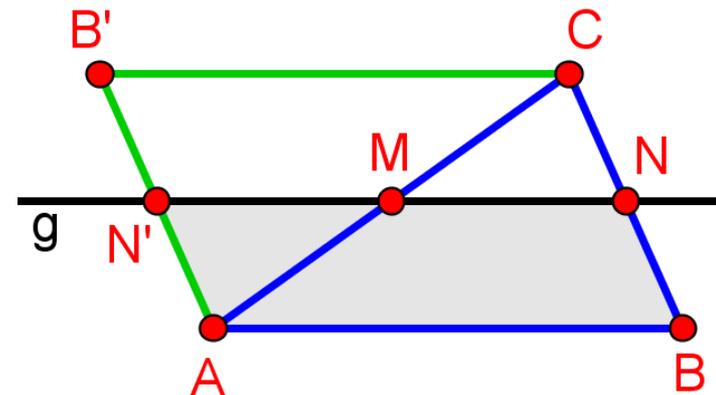
$[AN'] \cong [BN] \wedge [AN'] \cong [CM]$

$\Rightarrow [CM] \cong [BN]$

$N \in ]BC[$   
 $\Rightarrow N$  ist der Mittelpunkt von  $[BC]$ .

Wegen  $P_M(N) = N'$  gilt:  $[MN] \cong [MN']$

$\Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} |NN'| \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2} |AB|$



#

b) Annahme:  $(ABC)$  Dreieck  $\wedge M = M_{[AC]} \wedge MM_{[BC]} \not\parallel AB$

$\exists_{g \subset \varepsilon} M \in g \wedge g \parallel AB$

(P-Satz 1.23: Starkes Parallelenaxiom)

$\stackrel{a)}{\Rightarrow} g \cap [BC] = \{N\}$ , mit  $N = M_{[BC]}$

$\Rightarrow MM_{[BC]} = g \parallel AB$  ☛ Widerspruch zur Ann.  $MM_{[BC]} \not\parallel AB$

#

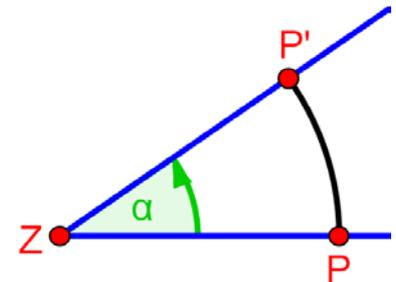


Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.7 Drehung

## Definition 2.23

- ▶ Eine Abbildung  $D_{Z,\alpha}$  der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt genau dann **Drehung** (Rotation), wenn sie
  - ▶ einen Fixpunkt  $Z$  besitzt und
  - ▶ jedem Punkt  $P \neq Z$  den Bildpunkt  $P'$  so zuordnet, dass gilt:  $|ZP| = |ZP'| \wedge |\sphericalangle PZP'| = \alpha$
- ▶  $Z$  heißt das **Zentrum** und  $\alpha$  der **Drehwinkel** der Drehung  $D_{Z,\alpha}$ .



## ▶ Bemerkungen

- ▶ Der Drehsinn bei Drehungen ist, wenn nicht anders angegeben, immer mathematisch positiv (gegen den Uhrzeigersinn).
- ▶ Der Begriff „**Drehwinkel**“ bezeichnet die Winkelgröße eines positiv orientierten Winkels.

## ► Bemerkungen

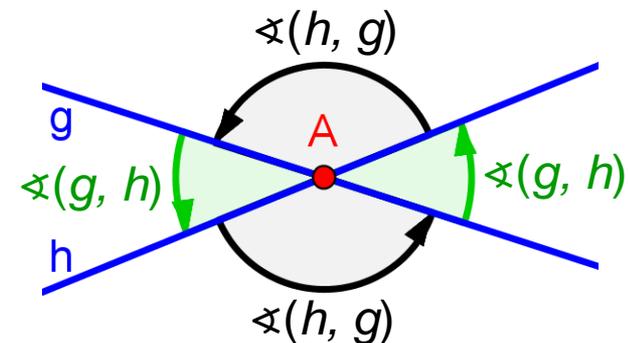
### ▷ *Spezialfälle der Drehung*

Ist bei einer Drehung  $D_{Z,\alpha}$  in der Ebene  $\varepsilon$  der Drehwinkel  $\alpha$

- ▶ der **Nullwinkel**, dann ist  $P' = P$  und  $D_{Z,\alpha} = id_\varepsilon$  ist die **Identität**.
- ▶ ein **gestreckter Winkel**, dann gilt  $P-Z-P'$  und wegen  $|ZP| = |ZP'|$  ist  $Z$  der Mittelpunkt von  $[PP']$ . Dies entspricht der Definition der **Punktspiegelung**  $P_Z$ .

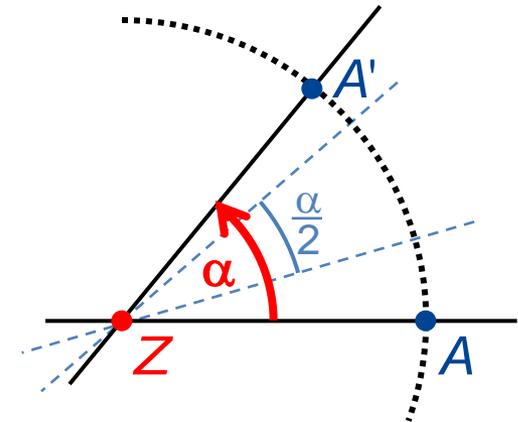
### ▷ *Schnittwinkel zweier Geraden $g$ und $h$ .*

- ▶ Schneiden sich zwei Geraden  $g$  und  $h$ , dann bezeichnet  $\sphericalangle(g, h)$  die beiden positiv orientierten, höchstens stumpfen Winkel, deren Erstschenkel auf  $g$  und deren Zweitschenkel auf  $h$  liegt.
- ▶ Als Scheitelwinkel sind die beiden Winkel kongruent. Ihre Winkelgröße wird mit  $|\sphericalangle(g, h)|$  bezeichnet. Die Winkelgrößen  $|\sphericalangle(g, h)|$  und  $|\sphericalangle(h, g)|$  ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel.



## Satz 2.40

- a) Die Verkettung  $S_h \circ S_g$  zweier Geradenspiegelungen  $S_g$  und  $S_h$  deren Achsen  $g$  und  $h$  sich im Punkt  $Z$  schneiden, ist eine Drehung, deren Drehwinkel gleich dem doppelten Schnittwinkel der beiden Achsen ist.



$$g \cap h = \{Z\} \wedge |\sphericalangle(g, h)| = \alpha \Rightarrow S_h \circ S_g = D_{Z, 2\alpha}$$

- b) Jede Drehung  $D_{Z, \alpha}$  ist darstellbar als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen, deren Achsen sich im Drehzentrum  $Z$  schneiden und deren Schnittwinkel halb so groß ist wie der Drehwinkel  $\alpha$ .

### ► Beweis zu a)

Sei  $P' = (S_h \circ S_g)(P)$ . Zu zeigen ist:

$$(S_h \circ S_g)(Z) = Z \wedge \forall_{P \in \varepsilon \setminus \{Z\}} |ZP| = |ZP'| \wedge \forall_{P \in \varepsilon \setminus \{Z\}} |\sphericalangle PZP'| = 2|\sphericalangle(g, h)|$$

## ► Beweis zu Satz 2.40a (Fortsetzung)

i.  $(S_h \circ S_g)(Z) = S_h(S_g(Z)) \stackrel{Z \in g}{=} S_h(Z) \stackrel{Z \in h}{=} Z$

ii.  $\forall P \in \varepsilon \setminus \{Z\} \quad S_g(P) =: P'_g \wedge S_h(P'_g) = P'$   
 $\stackrel{Z \in g \cap h}{\Rightarrow} \stackrel{\text{Satz 1.13}}{[ZP] \cong [ZP'_g]} \wedge [ZP'_g] \cong [ZP']$   
 $\stackrel{(\text{SK}_2)}{\Rightarrow} [ZP] \cong [ZP'] \stackrel{\text{Def. 1.15}}{\Rightarrow} |ZP| = |ZP'|$

iii. Zu zeigen ist:  $\forall P \in \varepsilon \setminus \{Z\} \quad |\sphericalangle PZP'| = 2|\sphericalangle(g, h)|$

1. Fall:  $P \in g$

$$\Rightarrow P' = (S_h \circ S_g)(P) = S_h(S_g(P)) = S_h(P) \stackrel{\text{Def. 2.4}}{\Rightarrow} |\sphericalangle PZP'| = 2|\sphericalangle(g, h)|$$

2. Fall:  $P = Q \notin g \wedge k = QZ$ , d.h.  $Q \in k \setminus \{Z\}$

$$\stackrel{\text{Satz 2.13}}{\Rightarrow} \exists m \subset \varepsilon \wedge Z \in m \quad S_h \circ S_g = S_m \circ S_k \stackrel{\text{Satz 2.17a}}{\Rightarrow} |\sphericalangle(g, h)| = |\sphericalangle(k, m)| \quad (*)$$

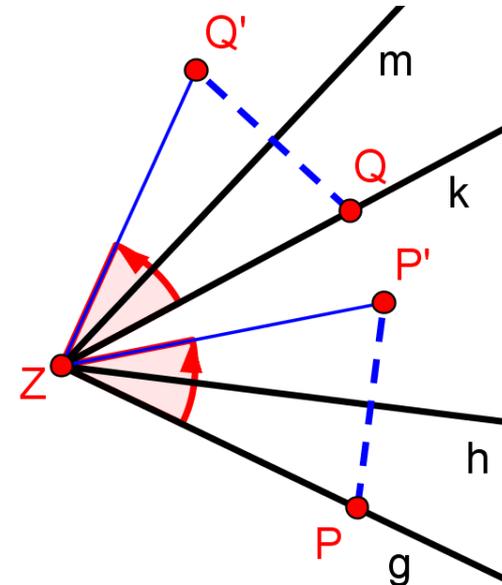
$$\Rightarrow Q' = (S_h \circ S_g)(Q) = (S_m \circ S_k)(Q) = S_m(S_k(Q)) \stackrel{Q \in k}{=} S_m(Q)$$

$$\stackrel{\text{Def. 2.4}}{\Rightarrow} |\sphericalangle QZQ'| = 2 \cdot |\sphericalangle(k, m)| \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot |\sphericalangle(g, h)|$$

i. ii. iii.

$$\Rightarrow S_h \circ S_g = D_{Z, 2|\sphericalangle(g, h)|}$$

#



## ► Beweis zu Satz 2.40b

▷ Gegeben:  $D_{Z,\alpha}$

▷ Wähle zwei Geraden  $g$  und  $h$   
mit  $g \cap h = \{Z\}$  und  $|\sphericalangle(g, h)| = \frac{1}{2} \alpha$ .

Satz 2.40a  
 $\Rightarrow S_h \circ S_g = D_{Z,\alpha}$

#

## ► Bemerkung

▷ Da die erste Achse  $g$  frei gewählt werden kann, gibt es beliebig viele Möglichkeiten eine Drehung durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen zu ersetzen. Dies kann für Anwendungen wichtig sein.

## Satz 2.41: Eigenschaften der Drehung

- a) Eine Drehung ist geradentreu, längentreu und winkelmaßtreu.
- b) Eine von der Identität verschiedene Drehung besitzt neben ihrem Drehzentrum keine weiteren Fixpunkte.
- c) Außer der Identität und der Halbdrehung, besitzt keine Drehung eine Fixgerade.

### ► Beweis

- a) Übungsaufgabe
- b) Übungsaufgabe
- c) 1. Fall:  $Z \in g$

Ein Punkt  $P \in g \setminus \{Z\}$  wird genau dann auf  $g$  abgebildet, wenn der Drehwinkel  $\sphericalangle PZP'$  der Nullwinkel oder ein gestreckter Winkel ist.

## ► Beweis zu Satz 2.41c (Fortsetzung)

2. Fall:  $Z \notin g$

$F$  ist der Fußpunkt des von  $Z$  auf  $g$  gefällten Lots und  $F \neq P \in g$ .

Annahme:  $g$  ist Fixgerade.

$$\Rightarrow P' = D_{Z,\alpha}(P) \in g$$

Def. 2.23

$$\Rightarrow |ZP| = |ZP'|$$

Def. 1.15/Satz 1.13

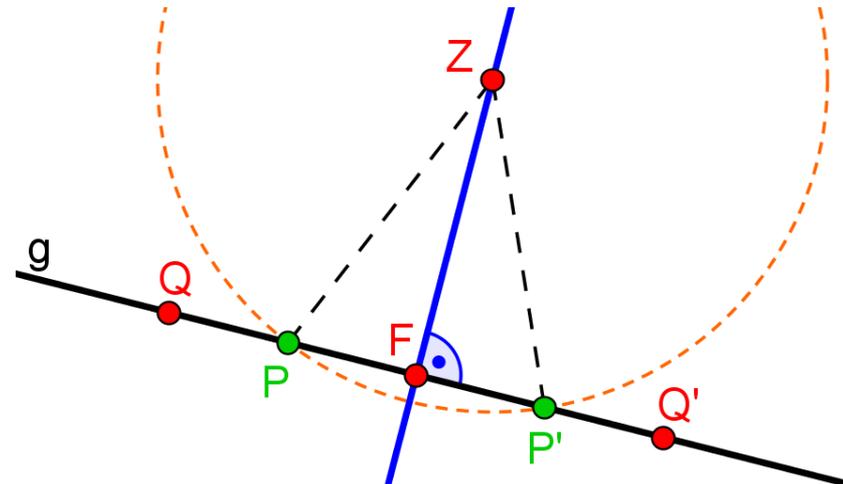
Satz 1.21

$$\Rightarrow P' = S_{ZF}(P)$$

$$\Rightarrow \forall Q \in g \setminus \{P, F\} \quad Q' = S_{ZF}(Q)$$

$\Rightarrow [PQ$  und  $[P'Q'$  sind als Bild und Urbild der Geradenspiegelung  $S_{ZF}$  entgegengesetzt orientiert.

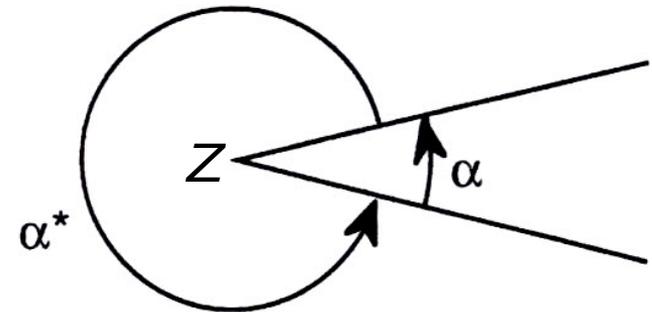
☛ **Widerspruch zur Tatsache, dass jede Drehung sich als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen darstellen lässt. Dies ist eine die Orientierung erhaltende Abbildung.**



## Satz 2.42: Inverse Drehung

Die zur Drehung  $D_{Z,\alpha}$  inverse Abbildung ist die Drehung um  $Z$  mit dem zu  $\alpha$  gleichorientierten komplementären Winkel  $\alpha^*$ .

Kurz:  $(D_{Z,\alpha})^{-1} = D_{Z,\alpha^*}$



### ► Bemerkung

$$\triangleright id_\varepsilon = (D_{Z,\alpha})^{-1} \circ D_{Z,\alpha} = D_{Z,\alpha^*} \circ D_{Z,\alpha}$$

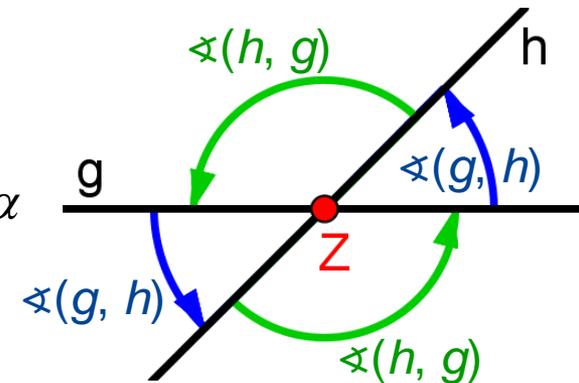
### ► Beweis

$$\triangleright D_{Z,\alpha} = S_h \circ S_g \wedge g \cap h = \{Z\} \wedge |\sphericalangle(g, h)| = \frac{1}{2} \alpha$$

$$\triangleright (D_{Z,\alpha})^{-1} = (S_h \circ S_g)^{-1} = S_g \circ S_h$$

$$\triangleright S_g \circ S_h = D_{Z, 2 \cdot |\sphericalangle(h, g)|}$$

► Da  $\sphericalangle(g, h)$  und  $\sphericalangle(h, g)$  sich zu einem gestreckten Winkel ergänzen, sind  $\alpha$  und  $\alpha^*$  zueinander komplementäre, gleichorientierte Winkel. #



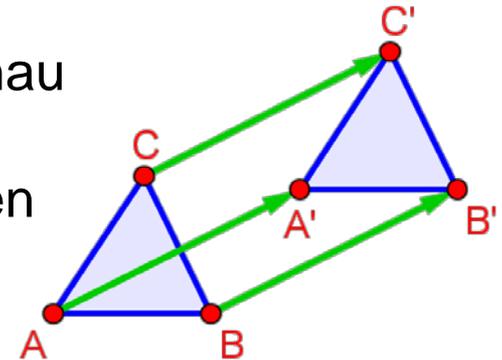


Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.8 (Parallel-)Verschiebung

## Definition 2.24

- ▷ Eine Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt genau dann (**Parallel-)**Verschiebung (Translation), wenn für alle Punkte  $P \in \varepsilon$  und die zugehörigen Bildpunkte  $P'$  die Pfeile  $\overrightarrow{PP'}$  kongruent und gleichorientiert sind.



## ► Bemerkungen

- ▷ Auch die Identität  $id_{\varepsilon}$  ist eine Verschiebung mit dem Nullpfeil als Verschiebungspfeil.

## Definition 2.25

- ▷ Der **Vektor**  $\overrightarrow{PP'}$  ist die Äquivalenzklasse aller zum Pfeil  $\overrightarrow{PP'}$  kongruenten und gleichorientierten Pfeile.

## ► Bemerkungen

- ▶ Die Relation „kongruent und gleichorientiert“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge *aller* Pfeile.
- ▶ Die **Länge eines Vektors** ist die Länge eines zugehörigen Pfeils, also die Länge der von Anfangs- und Endpunkt des Pfeils festgelegten Strecke.
- ▶ Unter der **Richtung eines Vektors** versteht man Richtung *und* Orientierung der zugehörigen Pfeile.
- ▶ Ist  $\overrightarrow{RS}$  ein zu  $\overrightarrow{PQ}$  kongruenter und gleichorientierter Pfeil, dann kann man den Vektor  $\overrightarrow{PQ}$  auch mit  $\overrightarrow{RS}$  bezeichnen. Es gilt dann  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ , auch wenn die Pfeile  $\overrightarrow{PQ}$  und  $\overrightarrow{RS}$  verschieden sind.
- ▶ Nach Definition 2.24 gehört zu jeder Verschiebung genau ein Vektor und umgekehrt. Der **Verschiebungsvektor** wird allgemein mit  $\vec{v}$  bezeichnet, die zugehörige Verschiebung – der Bezeichnung Translation entsprechend – mit  $T_{\vec{v}}$ .

## Satz 2.43

Zu zwei Punkten  $P$  und  $Q$  gibt es genau eine Verschiebung  $T_{\vec{v}}$ , die  $P$  auf  $Q$  abbildet.

### ► Beweis

▷ 1. Fall:  $P = Q$

$id_{\mathcal{E}}$  ist die einzige Verschiebung die  $P$  auf  $Q$  abbildet, weil alle anderen Verschiebungen keinen Fixpunkt besitzen.

▷ 2. Fall:  $P \neq Q$

Durch  $P$  und  $Q$  wird genau ein Pfeil  $\overrightarrow{PQ}$  festgelegt. Entsprechend gibt es genau einen Vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$  der als Verschiebungsvektor der Verschiebung in Frage kommt, die  $P$  auf  $Q$  abbildet. #

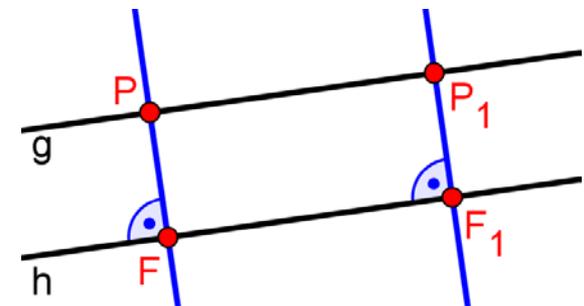
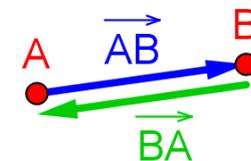
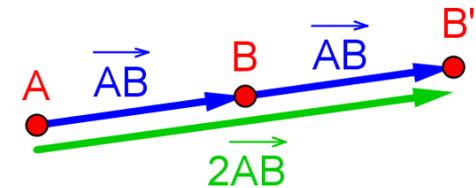
## ► Bemerkungen

► Im Gegensatz zur Geradenspiegelung und Punktspiegelung ist die Verschiebung nicht involutorisch. ( $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = T_{2\vec{v}} \neq id_{\mathcal{E}}$ )

► Wenn der zu  $\overrightarrow{AB}$  gehörige Vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  ist, dann ist der zu  $\overrightarrow{BA}$  gehörige Vektor  $\overrightarrow{BA}$  der **Gegenvektor** zu  $\overrightarrow{AB}$ :  $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$   
( $T_{-\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = id_{\mathcal{E}}$ )

►  $d(h, g)$  ist der **Abstand** zweier zueinander paralleler Geraden  $g$  und  $h$ . Fällt man von einem beliebigen Punkt  $P \in g$  ein Lot auf  $h$  und ist  $F \in h$  der zugehörige Lotfußpunkt, dann gilt:  
$$d(g, h) = |PF|$$

► Der zum Pfeil  $\overrightarrow{PF}$  gehörende Vektor  $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{(g, h)}$  heißt **Abstandsvektor** des Parallelenpaars  $(g, h)$ . Der Vektor  $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{(h, g)}$  ist Gegenvektor von  $\overrightarrow{(g, h)}$ . Man kann also schreiben:  $\overrightarrow{(h, g)} = -\overrightarrow{(g, h)}$

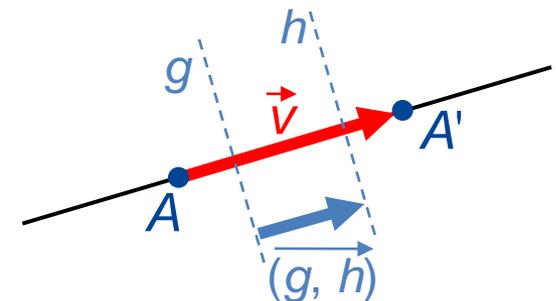


## Satz 2.44

- a) Die Verkettung  $S_h \circ S_g$  zweier Geradenspiegelungen  $S_g$  und  $S_h$  mit  $g \parallel h$  ist eine Verschiebung  $T_{\vec{v}}$  mit  $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{(g, h)}$ .

$$g \parallel h \Rightarrow S_h \circ S_g = T_{2 \cdot \overrightarrow{(g, h)}}$$

- b) Jede Verschiebung  $T_{\vec{v}}$  ist darstellbar als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen  $S_g$  und  $S_h$  mit den Achsen  $g$  und  $h$ , deren Abstandsvektor  $\overrightarrow{(g, h)}$  die gleiche Richtung und die halbe Länge von  $\vec{v}$  hat.
- $$\overrightarrow{(g, h)} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$$



## ► Beweis

- a) Sei  $P' = (S_h \circ S_g)(P)$ .

$$\begin{array}{l} \text{Satz 2.13} \\ \text{Satz 2.17b} \end{array} \Rightarrow \exists_{k, m \subset \varepsilon} S_h \circ S_g = S_m \circ S_k \wedge P \in k \wedge \overrightarrow{(g, h)} = \overrightarrow{(k, m)}$$

$$\Rightarrow P' = (S_h \circ S_g)(P) = (S_m \circ S_k)(P) = S_m(S_k(P)) \stackrel{P \in k}{=} S_m(P)$$



## ► Beweis zu Satz 2.44 (Fortsetzung)

$$[PP'] \cap m = \{Q\}$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.13}}{\Rightarrow} [PQ] \cong [QP'] \wedge P-Q-P'$$

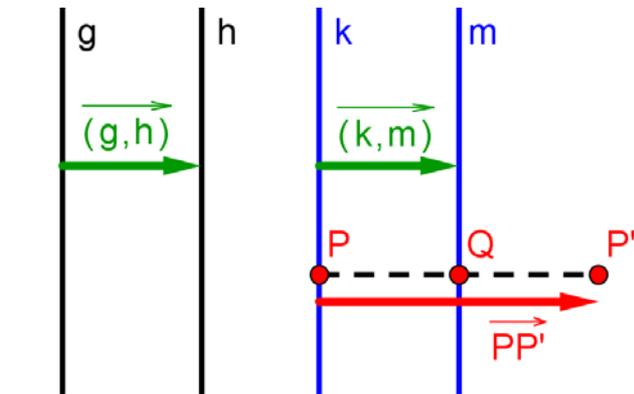
$$\stackrel{\text{Satz 1.25}}{\Rightarrow} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Mit  $\overrightarrow{PQ} = (k, m)$  und  $(g, h) = (k, m)$  ergibt sich:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = 2 \cdot (k, m) = 2 \cdot (g, h)$$

$$\Rightarrow S_h \circ S_g = T_{2 \cdot (g, h)}$$



#

b) Gegeben:  $T_{\overrightarrow{AB}}$

Wähle zwei parallele Geraden  $g$  und  $h$   
mit  $g \perp AB$  und  $(g, h) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

$$\stackrel{\text{Satz 2.44a}}{\Rightarrow} S_h \circ S_g = T_{\overrightarrow{AB}}$$

#



## Satz 2.45

- Die Verkettung  $P_N \circ P_M$  zweier Punktspiegelungen  $P_M$  und  $P_N$  ist eine Verschiebung  $T_{\vec{v}}$  mit  $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$ .
- Jede Verschiebung  $T_{\vec{v}}$  ist darstellbar als Verkettung von zwei Punktspiegelungen  $P_M$  und  $P_N$ , deren Zentren  $M$  und  $N$  einen Vektor  $\overrightarrow{MN}$  definieren, mit  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ .

### ► Beweis

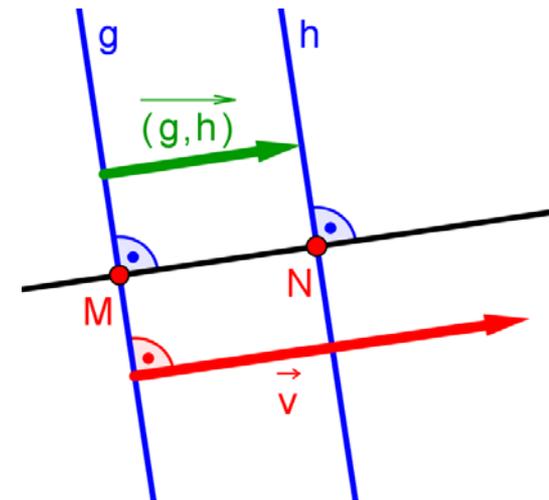
a) Sei  $g \perp MN$  mit  $g \cap MN = \{M\}$  und  $h \perp MN$  mit  $h \cap MN = \{N\}$  }  $\xRightarrow{\text{Satz 1.22}}$   $g \parallel h$

$$\Rightarrow P_N \circ P_M \stackrel{\text{Satz 2.30b}}{=} (S_h \circ S_{MN}) \circ (S_{MN} \circ S_g)$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.6/(G1)}}{=} S_h \circ (S_{MN} \circ S_{MN}) \circ S_g$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.15}}{=} S_h \circ id_{\varepsilon} \circ S_g$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.6/(G2)}}{=} S_h \circ S_g \stackrel{\text{Satz 2.44a}}{=} T_{2 \cdot (g, h)} = T_{2 \cdot \overrightarrow{MN}} \quad \#$$



## ► Beweis zu Satz 2.45b

b) Sei  $T_{\vec{v}}$  mit  $T_{\vec{v}}(P) = P'$  gegeben und  $Q = M_{[PP']}$ .

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PP'}$$

$$\stackrel{a)}{\Rightarrow} P_Q \circ P_P = T_{\overrightarrow{PP'}} = T_{\vec{v}}$$

#

## ► Bemerkung

- ▷ Eine Verschiebung kann also sowohl als Verkettung von zwei Punktspiegelungen als auch als Verkettung von zwei Achsenspiegelungen dargestellt werden.
- ▷ In jedem Fall kann das Zentrum der ersten Punktspiegelung bzw. die Achse der ersten Geradenspiegelung frei gewählt werden!!

## Satz 2.46: Eigenschaften der Verschiebung

- a) Eine Verschiebung ist geradentreu, längentreu & winkelmaßtreu.
- b) Eine Verschiebung bildet Geraden auf parallele Geraden ab.
- c) Alle zum Verschiebungsvektor parallele Geraden sind Fixgeraden der Verschiebung.
- d) Eine Verschiebung, die nicht die Nullverschiebung ist, besitzt keinen Fixpunkt.

► **Beweise:** Übungsaufgaben

## Satz 2.47: Charakteristische Eigenschaften von Verschiebungen $\neq id_{\varepsilon}$

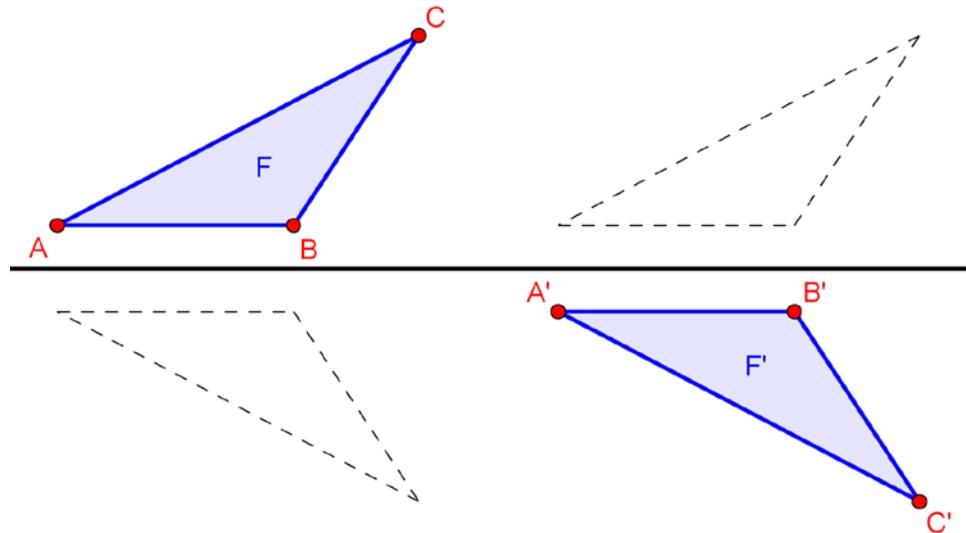
Eine bijektive Abbildung  $\varphi : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  der Ebene  $\varepsilon$  auf sich, die

- ▷ jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet und
  - ▷ keinen Fixpunkt besitzt,
- ist eine Verschiebung.



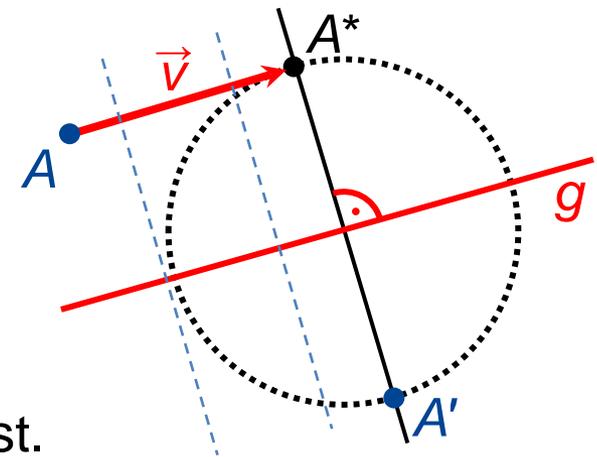
Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

# 2.9 Schubspiegelung



## Definition 2.26

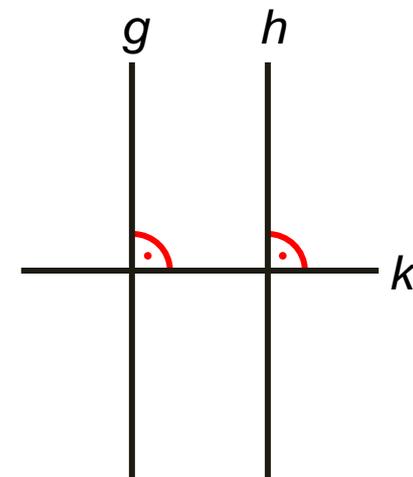
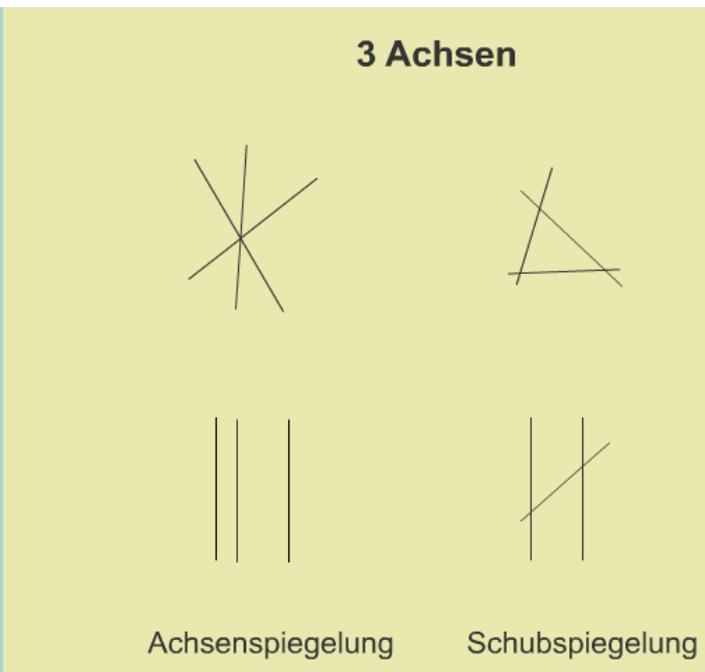
- ▶ Eine Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich heißt genau dann **Schubspiegelung** (Gleitspiegelung)  $G_{g, \vec{v}}$ , wenn sie die Verkettung einer Achsenspiegelung an einer Geraden  $g$  mit einer Verschiebung mit Verschiebungsvektor  $\vec{v}$  in Richtung  $g$  ist.
- ▶ Die Gerade  $g$  wird **Schubspiegelungsachse** genannt.



## Satz 2.48

Eine Verkettung von drei Geradenspiegelungen, die nicht durch eine einzige Geradenspiegelung ersetzt werden kann, ist eine Schubspiegelung  $G_{k, \vec{v}}$ .

Es gilt  $G_{k, \vec{v}} = S_k \circ S_h \circ S_g$  mit  $g \parallel h \wedge h \perp k \wedge \vec{v} = 2 \cdot (\overrightarrow{g, h})$ .



## Satz 2.49

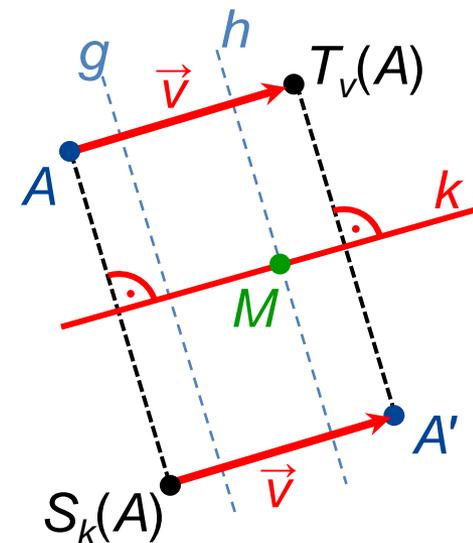
Bei einer Schubspiegelung sind die Geradenspiegelung an der Achse und die Verschiebung in Richtung der Achse vertauschbar.

### ► Beweis

$$\begin{aligned} \triangleright G_{k, \vec{v}} &= S_k \circ T_{\vec{v}} \text{ mit} \\ T_{\vec{v}} &= S_h \circ S_g \wedge g \parallel h \wedge h \perp k \wedge \vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{(g, h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright G_{k, \vec{v}} &= S_k \circ T_{\vec{v}} = S_k \circ S_h \circ S_g \\ &\stackrel{h \perp k \wedge \text{Satz 2.33}}{=} S_h \circ S_k \circ S_g \\ &\stackrel{g \perp k \wedge \text{Satz 2.33}}{=} S_h \circ S_g \circ S_k \\ &= T_{\vec{v}} \circ S_k \end{aligned}$$

#



### ► Bemerkung

$$\triangleright G_{k, \vec{v}} = S_k \circ T_{\vec{v}} = S_k \circ S_h \circ S_g \stackrel{h \cap k = \{M\}}{=} P_M \circ S_g$$

## ► **Bemerkung**

- ▷ Die Identität kann als Verschiebung mit dem Nullvektor als Verschiebungsvektor aufgefasst werden. Dementsprechend ist eine Geradenspiegelung ein Spezialfall einer Schubspiegelung!
- ▷ Folglich gilt:

### **Satz 2.50**

Jede ungleichsinnige Kongruenzabbildung ist eine Schubspiegelung.

## ► **Bezeichnungen**

- ▷ Geradenspiegelungen werden auch als **uneigentliche Schubspiegelungen** bezeichnet.
- ▷ Eine **eigentliche Schubspiegelung** ist jede Schubspiegelung, die keine Geradenspiegelung ist, die also eine echte Verschiebung enthält.

## Satz 2.51: Eigenschaften der Schubspiegelung

- a) Schubspiegelungen sind geraden-, längen und winkelmaßtreu.
- b) Bei einer Schubspiegelung werden
  - achsenparallele Geraden auf gleichorientierte parallele Geraden
  - zur Achse senkrechte Geraden auf um den Vektor  $v$  verschobene und entgegengesetzt orientierte Geraden

abgebildet.

- b) Bei einer Schubspiegelung wird die Verbindungsstrecke  $[PP']$  eines Punkts  $P$  und seines Bildpunkts  $P'$  von der Schubspiegelungsachse halbiert.

- c) Für das Inverse der Schubspiegelung  $G_{g, \vec{v}} = S_g \circ T_{\vec{v}}$  gilt:

$$(G_{g, \vec{v}})^{-1} = (S_g \circ T_{\vec{v}})^{-1} = (T_{\vec{v}})^{-1} \circ (S_g)^{-1} = T_{-\vec{v}} \circ S_g = S_g \circ T_{-\vec{v}} = G_{g, -\vec{v}}$$

## Satz 2.52: Eigenschaften der eigentlichen Schubspiegelung

- a) Eine eigentliche Schubspiegelung (**eS**) besitzt keinen Fixpunkt.
- b) Die Schubspiegelachse ist die einzige Fixgerade einer **eS**.