



Jürgen Roth

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5a: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Natürliche Zahlen \mathbb{N}
- 3 Ganze Zahlen \mathbb{Z}
- 4 Rationale Zahlen \mathbb{Q}
- 5 Reelle Zahlen \mathbb{R}
- 6 **Komplexe Zahlen \mathbb{C}**





Jürgen Roth

Kapitel 6: Komplexe Zahlen \mathbb{C}

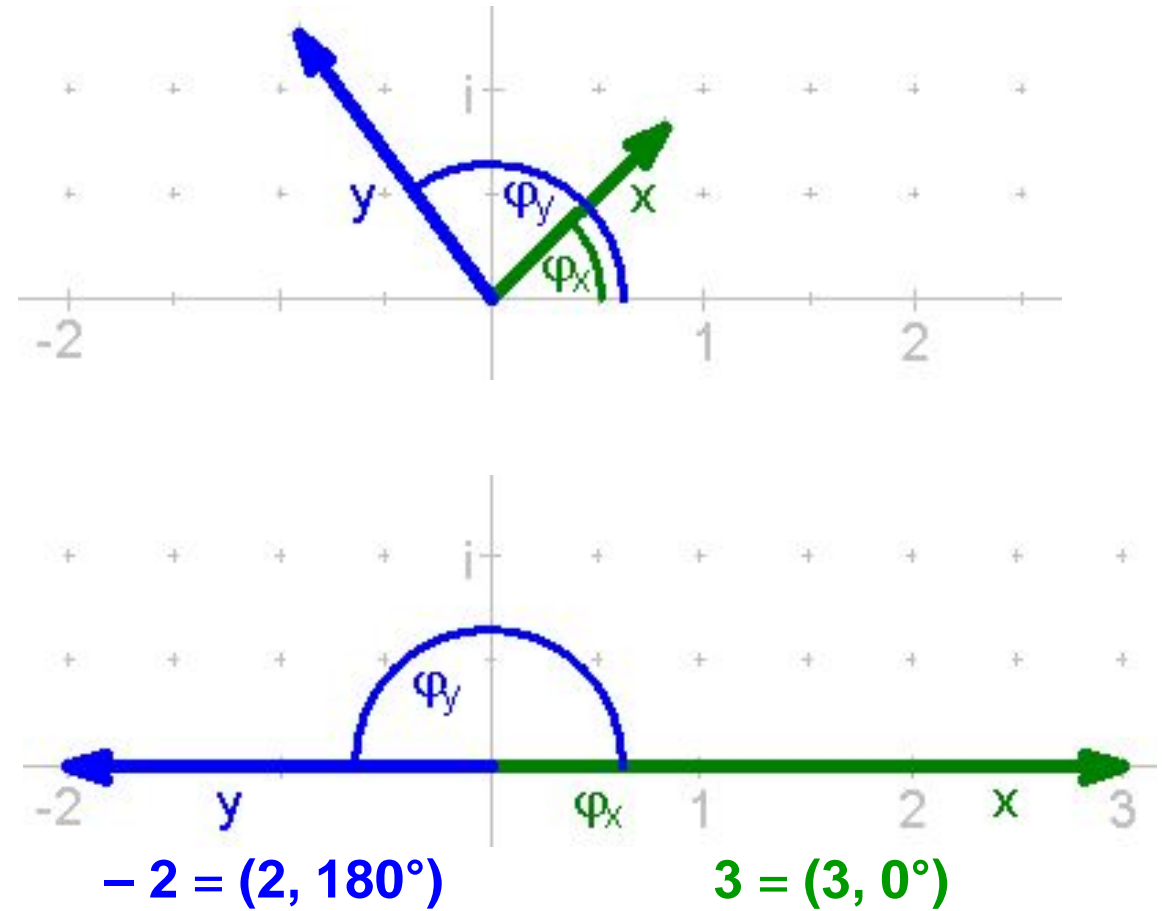
Didaktik der Zahlbereichserweiterungen



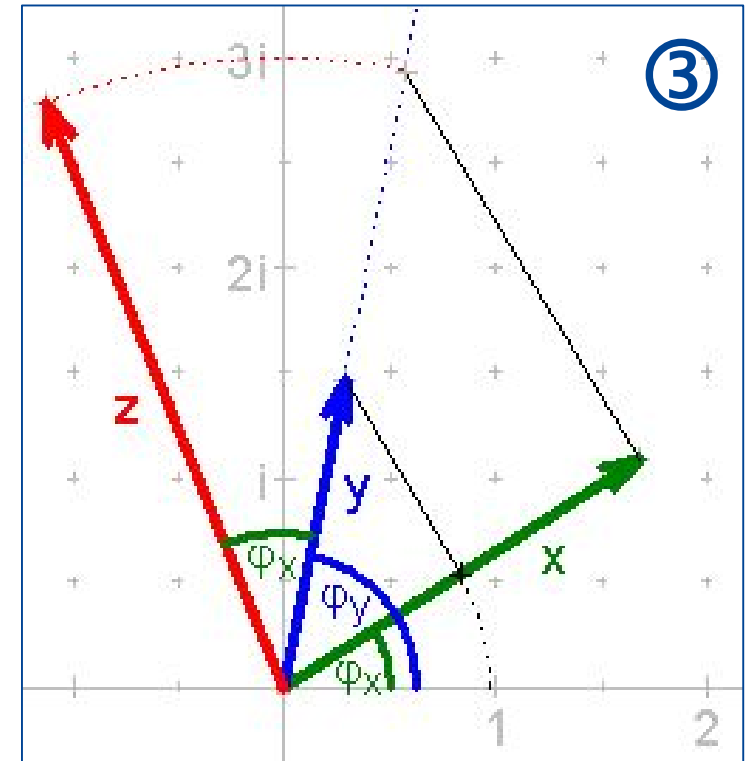
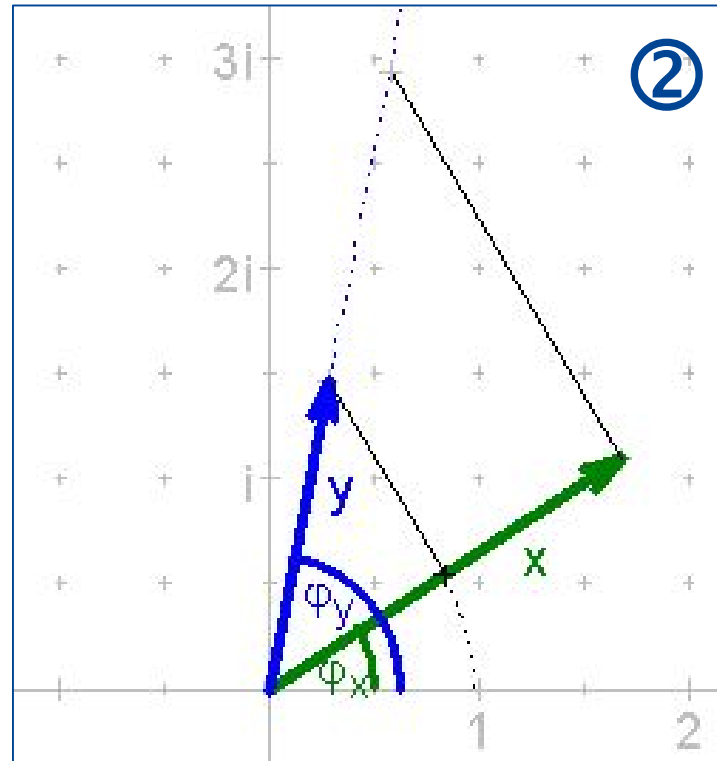
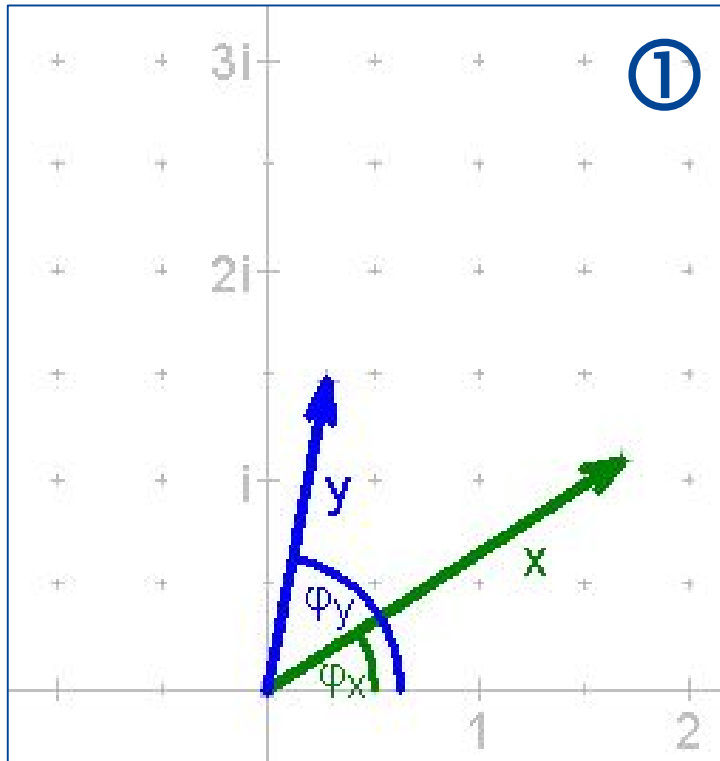
- ▶ Beim *Lösen von Gleichungen mit Computer-Algebra-Systemen* tauchen komplexe Zahlen auf – hierfür sollte man den Schülerinnen und Schülern eine befriedigende Erklärung anbieten.
- ▶ Die nach dem Spiralprinzip angelegte Vermittlung der *Idee der Zahlbereichserweiterung beim Erreichen einer Grenze* des aktuellen Zahlbereichs wird unterstützt, wenn man beim Gleichungslösen und Wurzelziehen an Grenzen stößt und sich Gedanken über eine mögliche Zahlbereichserweiterung macht.
- ▶ *Komplexe Zahlen sind praktisch*, weil sie die mathematische Aufarbeitung vieler inner- und außermathematischer Probleme deutlich vereinfachen oder erst möglich machen.



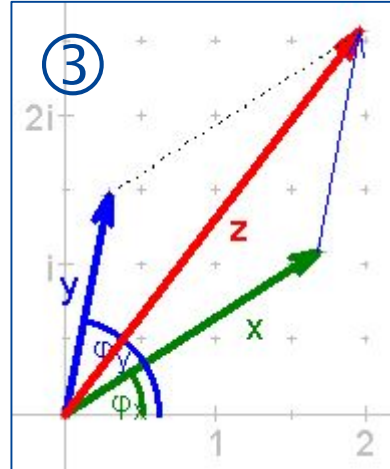
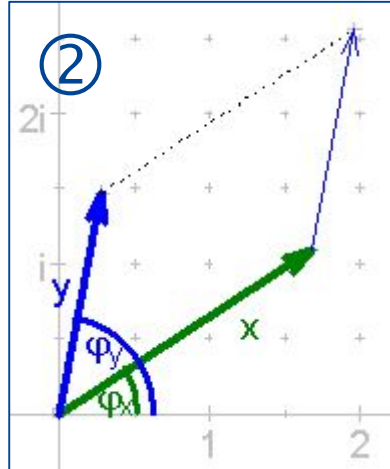
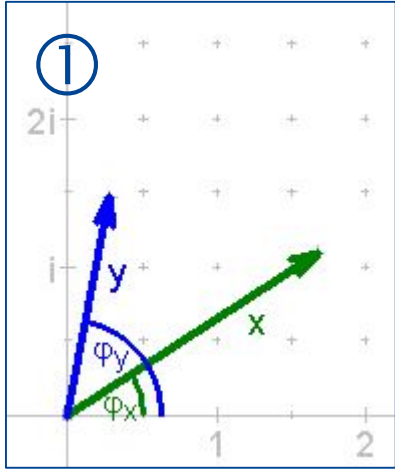
- ▷ Die Deutung von Punkten der „Zahlengeraden“ als reelle Zahlen wird erweitert auf die Punkte der Ebene, die nun als „komplexe Zahlen“ gedeutet werden.
- ▷ Komplexe Zahlen werden durch Zeiger repräsentiert, die im Koordinatenursprung beginnen.
- ▷ Alle Zeiger $z = (r_z, \varphi_z)$ werden eindeutig festgelegt durch ihre Länge r_z und den Winkel φ_z , den sie mit der positiven reellen Achse einschließen.
- ▷ Dabei ist r_z eine positive reelle Zahl und für φ_z gilt $0^\circ \leq \varphi_z < 360^\circ$.



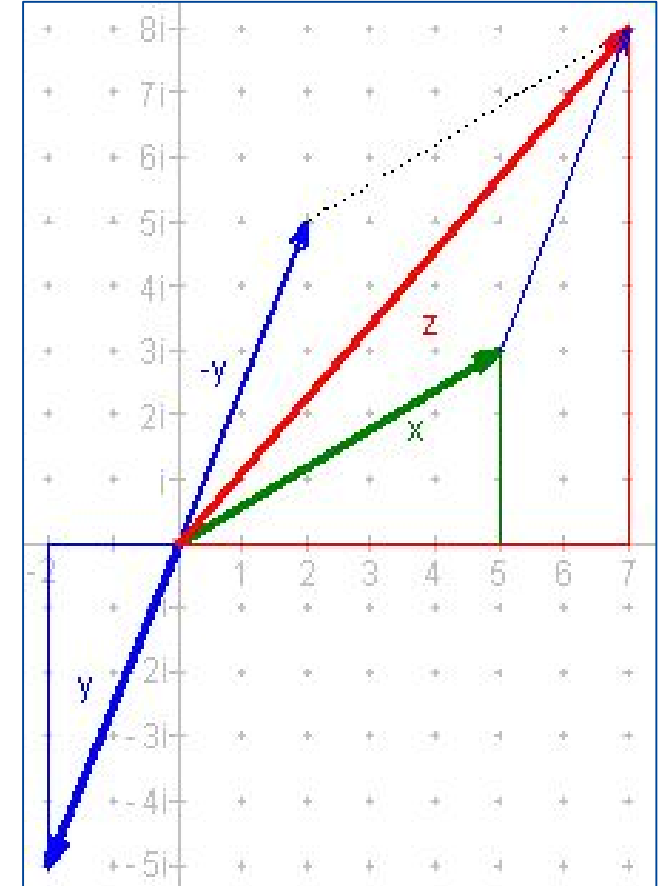
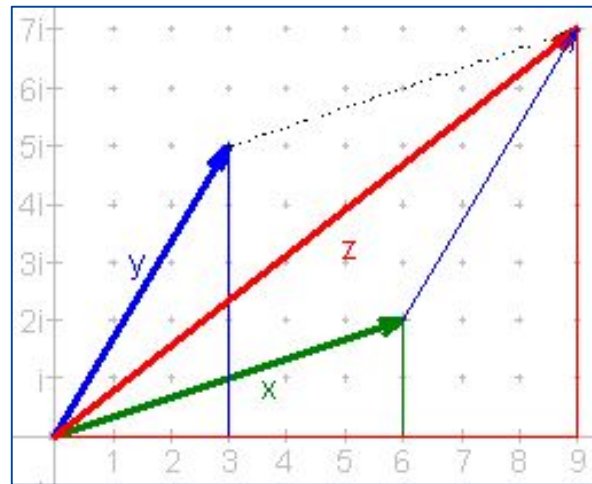
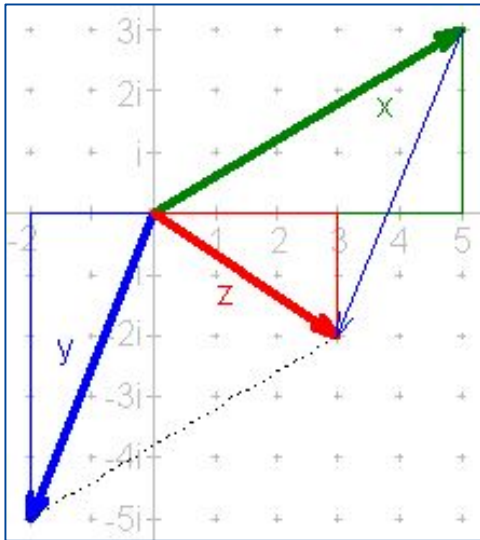
$$z = x \cdot y$$



$$z = x \pm y$$



$$z = x + y$$

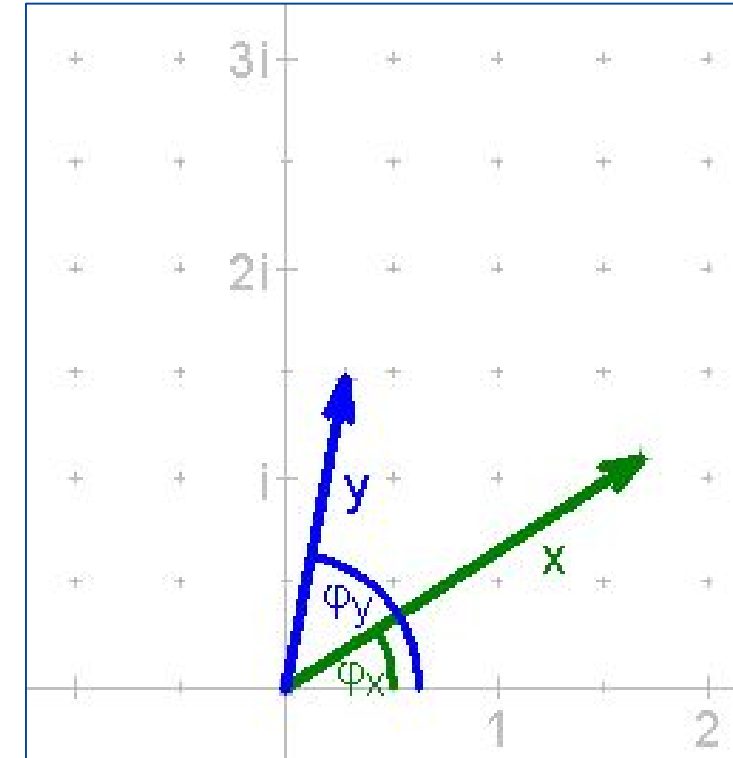


$$z = x - y = x + (-y)$$

- ▷ Die Richtung der zweiten Koordinatenachse wird durch den Zeiger $(1, 90^\circ)$ festgelegt.
- ▷ Wegen der Bedeutung für den Zahlenbereich erhält er einen Namen, nämlich $i = (1, 90^\circ)$.
(Vgl. die Achsenbeschriftungen in den bisherigen Darstellungen.)
- ▷ Wenn man i mit sich selbst multipliziert, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 i^2 &= i \cdot i \\
 &= (1, 90^\circ) \cdot (1, 90^\circ) \\
 &= (1 \cdot 1, 90^\circ + 90^\circ) \\
 &= (1, 180^\circ)
 \end{aligned}$$

- ▷ $(1, 180^\circ)$ ist ein Zeiger auf der reellen Achse, nämlich die Zahl -1 .
- ▷ In diesem Zahlensystem ist die Gleichung $x^2 = -1$ also lösbar.



▶ **Mit der Zeigeraddition kann jeder Zeiger z als Summe dargestellt werden aus**

- ▷ einem auf der reellen Achse liegenden Zeiger x
- ▷ und einem auf der durch i festgelegten Achse (wir nennen sie i -Achse) liegenden Zeiger y .

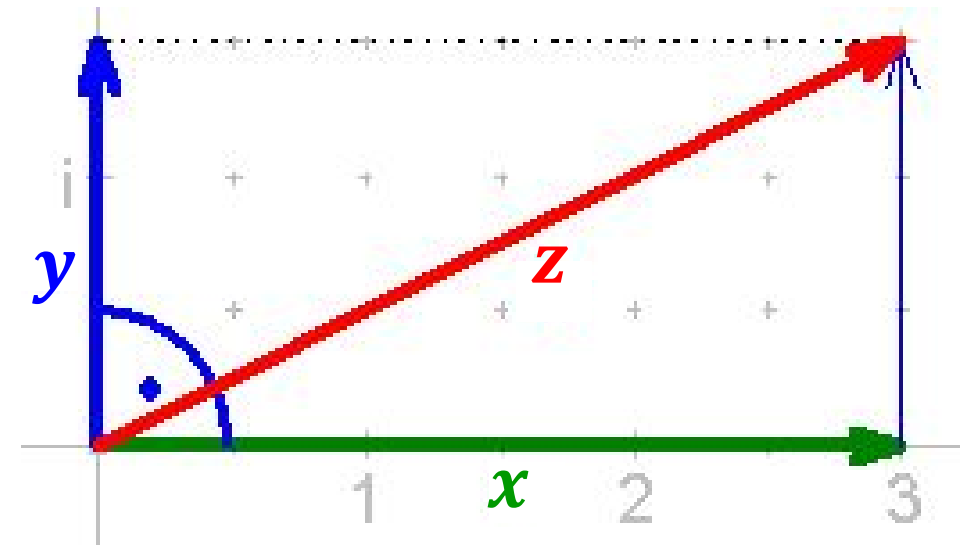
▶ **Damit ergibt sich:**

$$\begin{aligned} \triangleright z &= x + y = (r_x, 0^\circ) + (r_y, 90^\circ) \\ &= (r_x, 0^\circ) + (r_y \cdot 1, 0^\circ + 90^\circ) \\ &= (r_x, 0^\circ) + (r_y, 0^\circ) \cdot (1, 90^\circ) \\ &= r_x + r_y \cdot i \end{aligned}$$

- ▷ Dabei sind r_x und r_y reelle Zahlen.

- ▷ **Beispiel:** Für den Zeiger in der Abbildung ergibt sich: $z = 3 + 1,5i$

- ▷ Auf dieser Grundlage lassen sich alle Rechenregeln für Zahlen (die Körperaxiome) relativ einfach herleiten.



Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Natürliche Zahlen \mathbb{N}
- 3 Ganze Zahlen \mathbb{Z}
- 4 Rationale Zahlen \mathbb{Q}
- 5 Reelle Zahlen \mathbb{R}
- 6 Komplexe Zahlen \mathbb{C}
- 7 **Hyperkomplexe Zahlen**



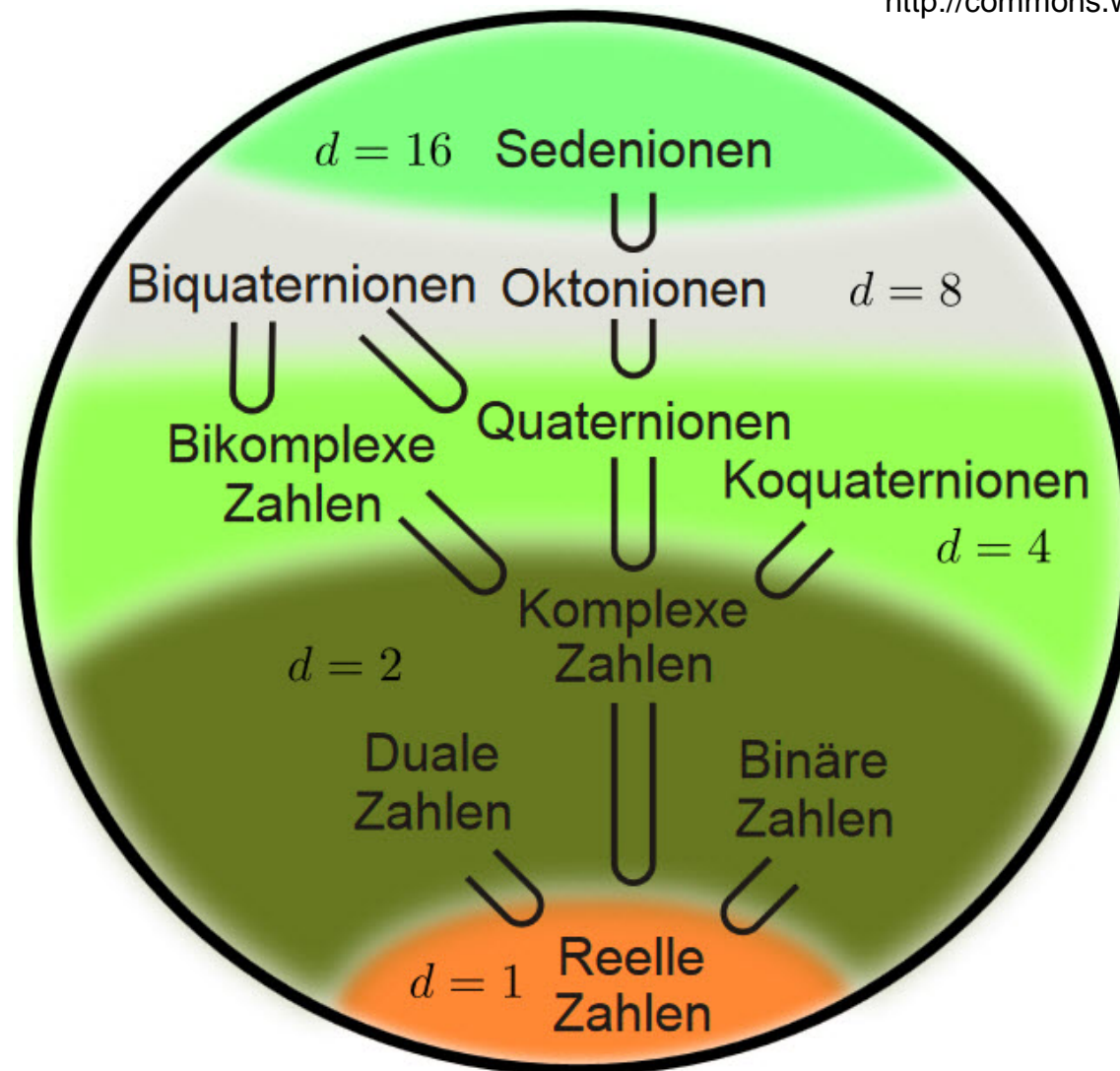


Jürgen Roth

Kapitel 7: Hyperkomplexe Zahlen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperkomplexe_Zahlen.svg



http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperkomplexe_Zahl

► Grundlegende Aspekte

▷ Quaternionen erlauben eine rechnerisch elegante Beschreibung des dreidimensionalen euklidischen Raumes und anderer Räume.

▷ Verwendungsbeispiel:
Berechnungs- und Darstellungsalgorithmen für Simulationen

▷ Jede Quaternion lässt sich eindeutig in der Form

$$x = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$$

mit $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$.

▷ Ein Quaternion kann auch als vierdimensionaler Vektor

$$(x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

aufgefasst werden.

► Einige Rechenoperationen

▷ $\lambda \cdot x = \lambda \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 \cdot i + \lambda \cdot x_2 \cdot j + \lambda \cdot x_3 \cdot k$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

▷ $x + y = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k + y_0 + y_1 \cdot i + y_2 \cdot j + y_3 \cdot k$
 $= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) \cdot i + (x_2 + y_2) \cdot j + (x_3 + y_3) \cdot k$

▷ $x \cdot y = (x_0, \vec{x}) \cdot (y_0, \vec{y})$
 $= (x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, x_0 \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot y_0 + \vec{x} \times \vec{y})$

▷ $\bar{x} = x_0 - x_1 \cdot i - x_2 \cdot j - x_3 \cdot k$

▷ Skalarteil: $\frac{x + \bar{x}}{2}$

▷ Vektorteil: $\frac{x - \bar{x}}{2}$