Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5a/c

Jürgen Roth

05.08.2024 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

1. Ziele und Inhalte
2. Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
3. Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$
4. Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
5. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$
6. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

6

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 6:
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 6:
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

6.1 Komplexe Zahlen im MU?

6.2 Gauß'sche Zahlenebene und Zeigermodell der Komplexen Zahlen

6.3 Hyperkomplexe Zahlen

Komplexe Zahlen im Unterricht?

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Beim **Lösen von Gleichungen mit Computer-Algebra-Systemen** tauchen komplexe Zahlen auf – hierfür sollte man den Lernenden eine befriedigende Erklärung anbieten.

Die nach dem Spiralprinzip angelegte Vermittlung der **Idee der Zahlbereichserweiterung beim Erreichen einer Grenze** des aktuellen Zahlbereichs wird unterstützt, wenn man beim Lösen von Gleichungen und Wurzelziehen an Grenzen stößt und sich Gedanken über eine mögliche Zahlbereichserweiterung macht.

Komplexe Zahlen sind praktisch, weil sie die mathematische Aufarbeitung vieler inner- und außermathematischer Probleme deutlich vereinfachen oder erst möglich machen.

Roth, J. (2003). Die Zahl i – fantastisch, praktisch, anschaulich. *Mathematik lehren, 121*, 47-49
http://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/zahl_i/roth_zahl_i.pdf

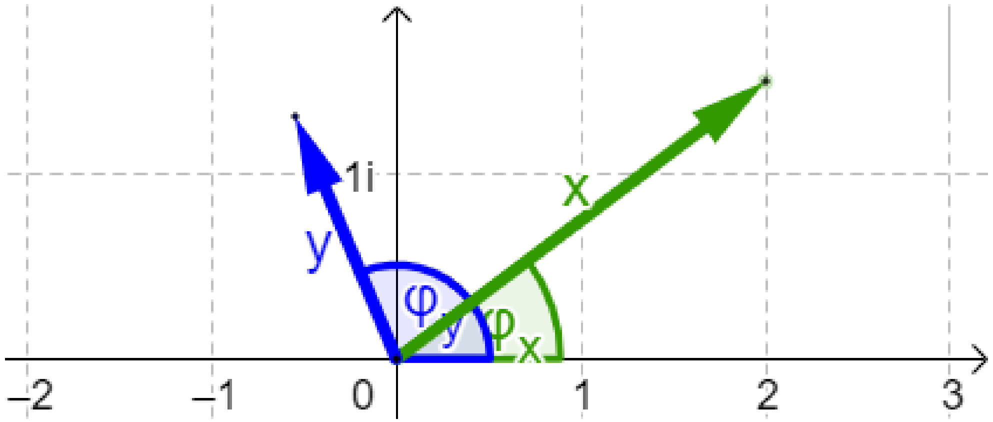
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

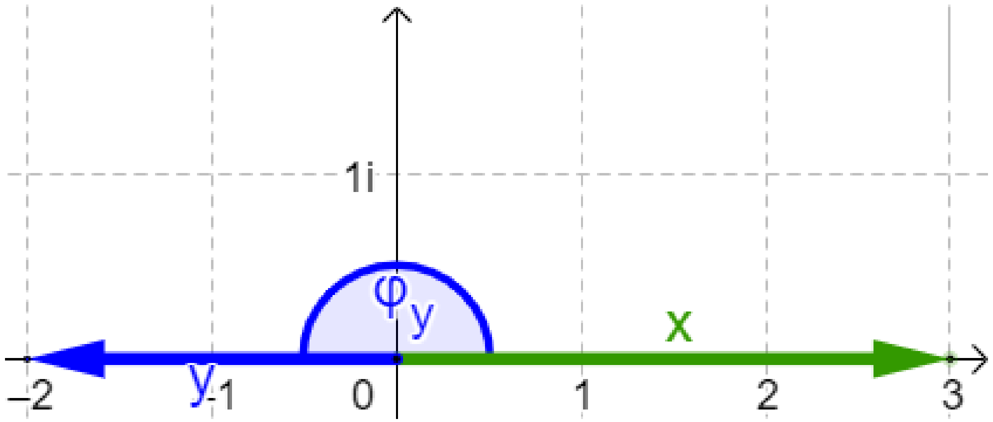
Kapitel 6:
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Gauß'schen Zahlenebene

Gauß'schen Zahlenebene & Zeigermodell

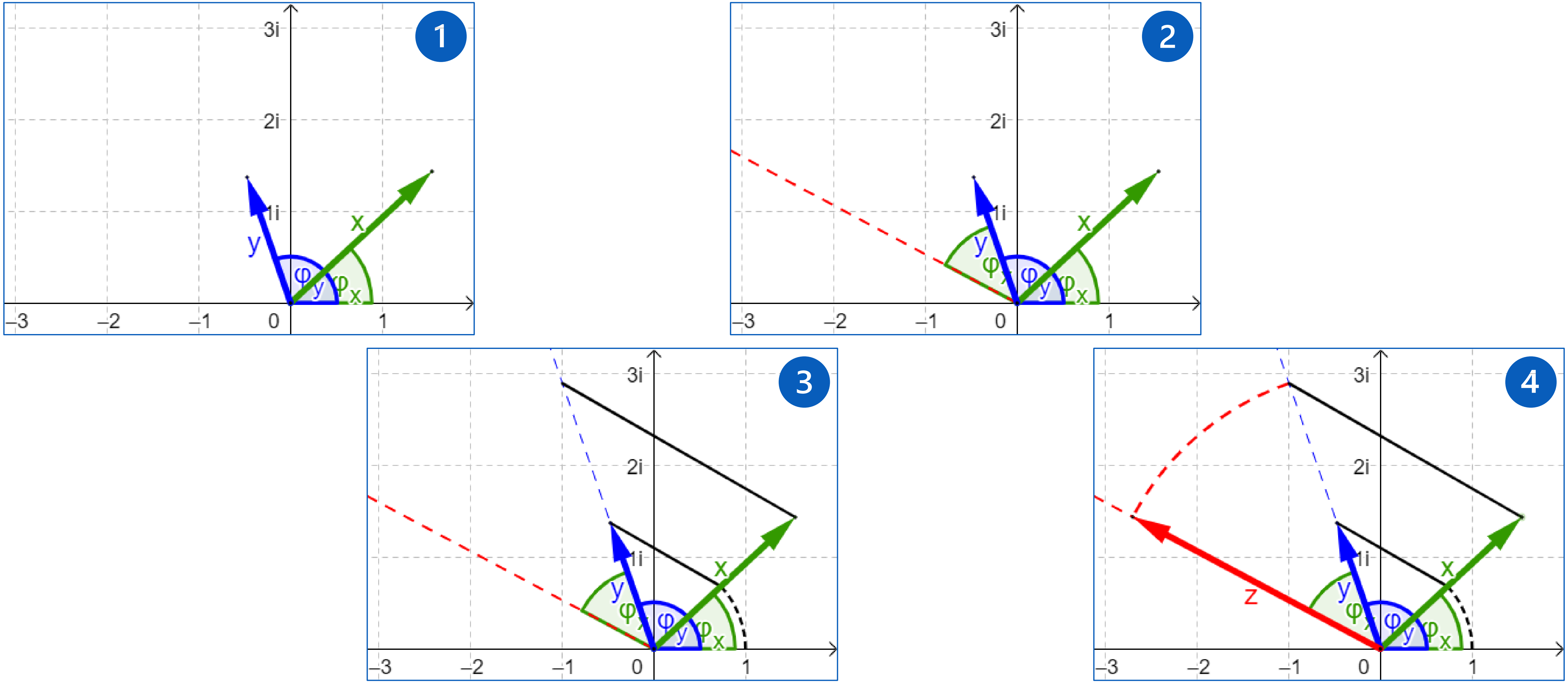
- Die Deutung von Punkten der „Zahlen-geraden" als reelle Zahlen wird erweitert auf die Punkte der Ebene, die nun als „komplexe Zahlen" gedeutet werden.
- Komplexe Zahlen werden durch Zeiger repräsentiert, die im Koordinatenursprung beginnen.
- Alle Zeiger $z = (r_z, \varphi_z)$ werden eindeutig festgelegt durch ihre Länge r_z und den Winkel φ_z, den sie mit der positiven reellen Achse einschließen.
- Dabei ist r_z eine positive reelle Zahl und für φ_z gilt $0° \leq \varphi_z < 360°$.



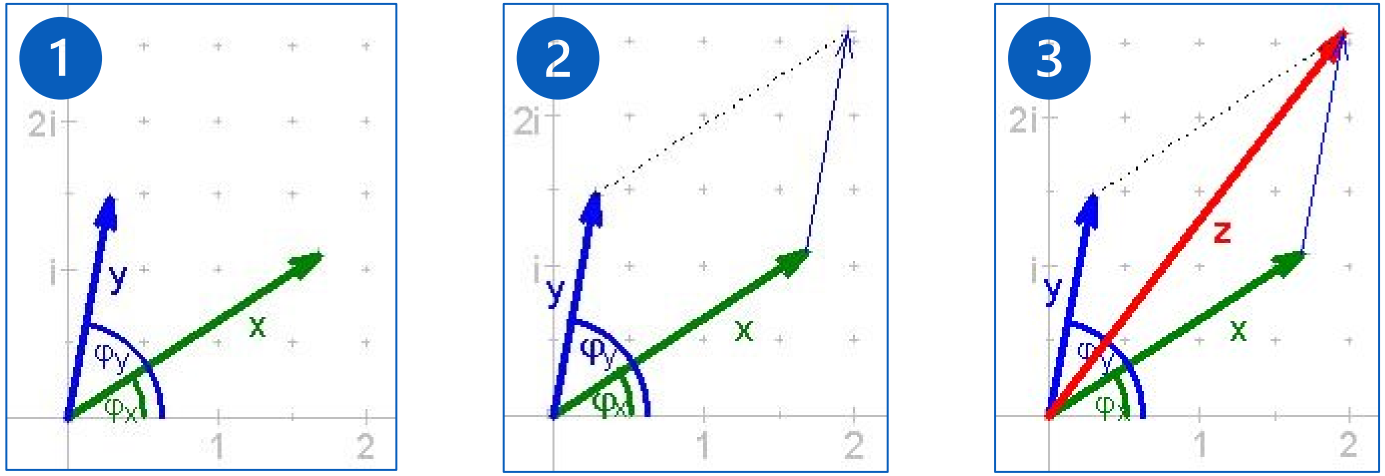


$\mathbf{-2 = (2, 180°)}$ $\mathbf{3 = (3, 0°)}$

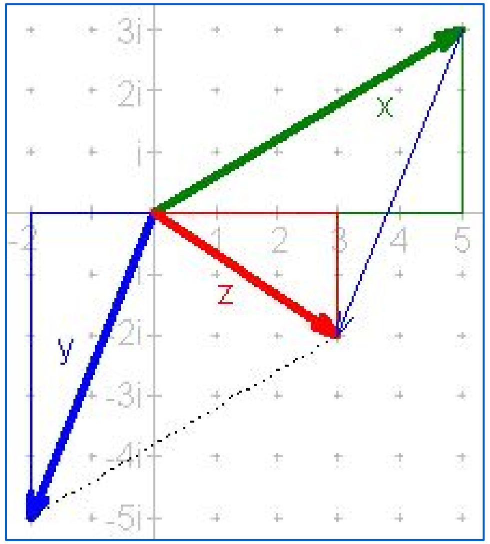
$z = x \cdot y$

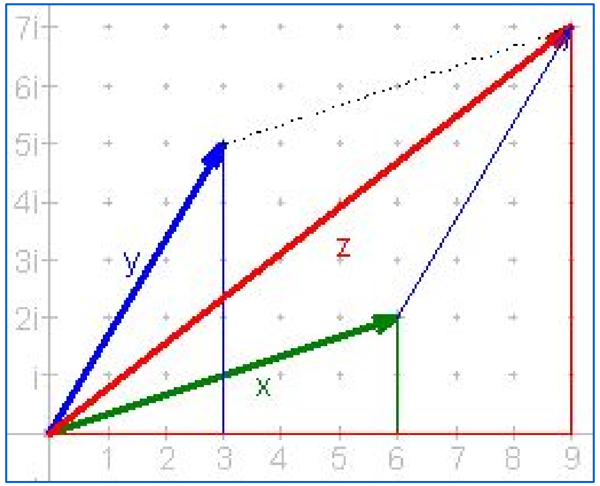


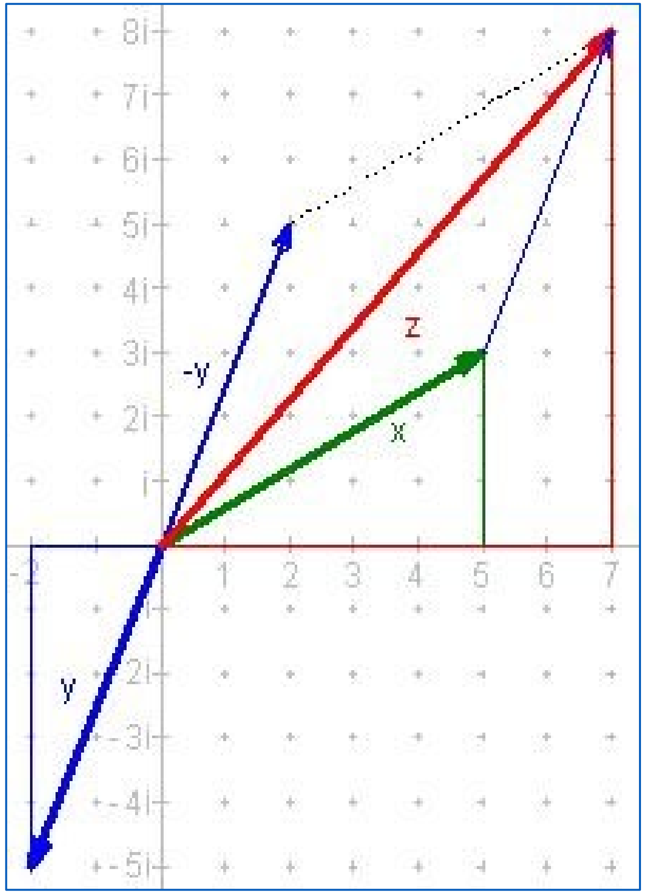
$z = x \pm y$



$z = x + y$







$z = x - y = x + (-y)$

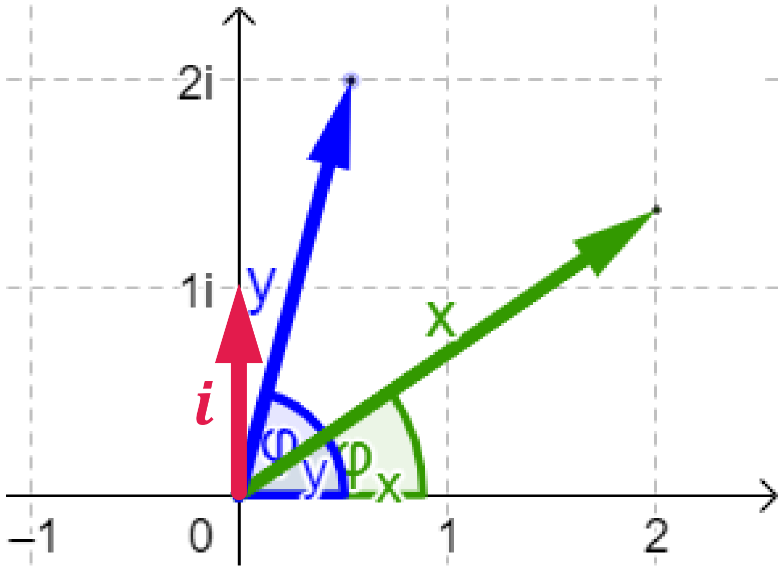
Die Zahl i

Die Zahl i

- Die Richtung der zweiten Koordinatenachse wird durch den Zeiger $(1, 90°)$ festgelegt.
- Wegen der Bedeutung für den Zahlenbereich erhält er einen Namen, nämlich $i = (1, 90°)$.
  (Vgl. die Achsenbeschriftungen in den bisherigen Darstellungen.)
- Wenn man i mit sich selbst multipliziert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= (1, 90°) \cdot (1, 90°) \\ &= (1 \cdot 1, 90° + 90°) \\ &= (1, 180°) \end{aligned}$$

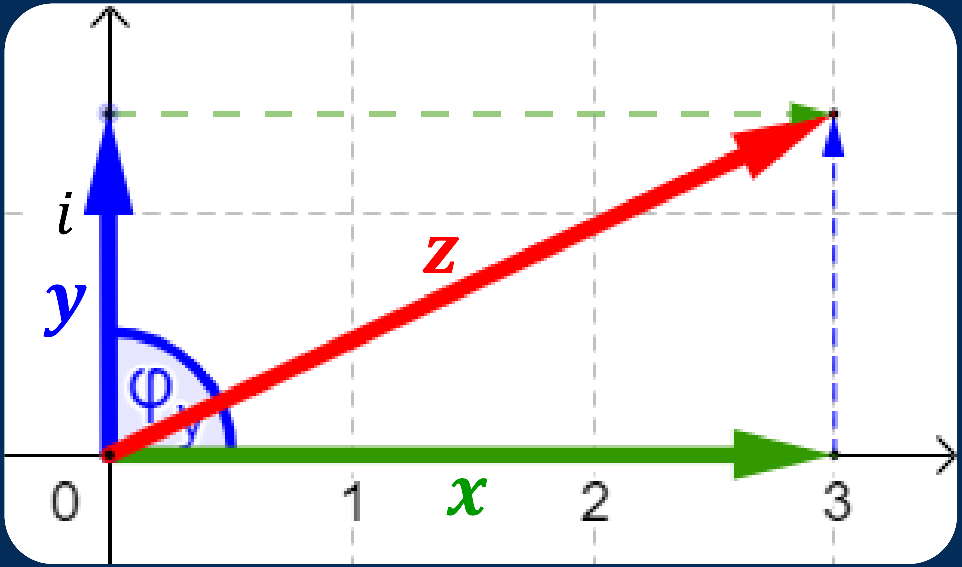
- $(1, 180°)$ ist ein Zeiger auf der reellen Achse, nämlich die Zahl -1.
- In diesem Zahlensystem ist die Gleichung $x^2 = -1$ also lösbar.



$z = a + b \cdot i$

Mit der **Zeigeraddition** kann jeder Zeiger z als Summe dargestellt werden aus

- einem auf der reellen Achse liegenden Zeiger x
- und einem auf der durch i festgelegten Achse (wir nennen sie i-Achse) liegenden Zeiger y.



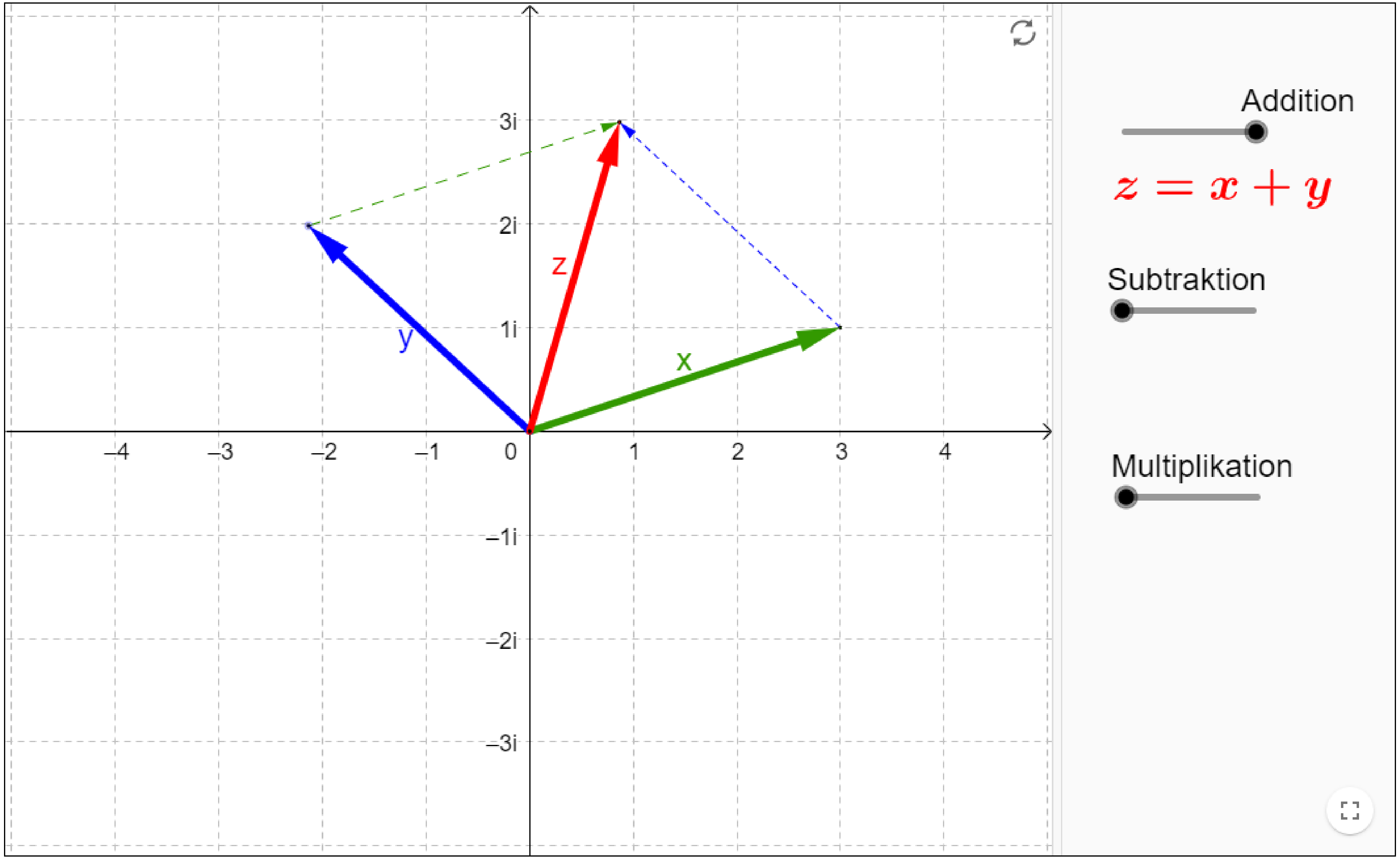
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z = x + y &= (r_x, 0°) + (r_y, 90°) \\ &= (r_x, 0°) + (r_y \cdot 1, 0° + 90°) \\ &= (r_x, 0°) + (r_y, 0°) \cdot (1, 90°) \\ &= r_x + r_y \cdot i \end{aligned}$$

- Dabei sind r_x und r_y reelle Zahlen.
- Beispiel: Für den Zeiger in der Abbildung ergibt sich: $z = 3 + 1{,}5i$
- Auf dieser Grundlage lassen sich alle Rechenregeln für Zahlen (die Körperaxiome) relativ einfach herleiten.

GeoGebra-Applet

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen



Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 6:
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

6.1 Komplexe Zahlen im MU?

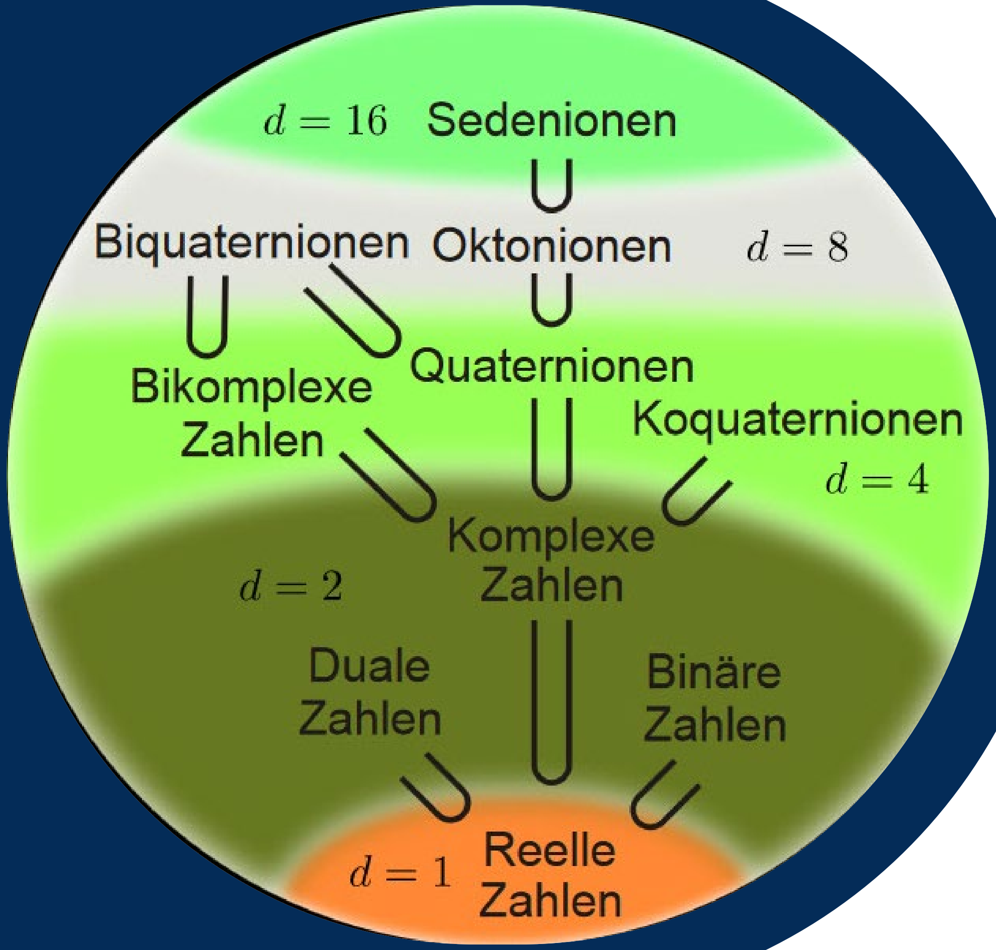
6.2 Gauß'sche Zahlenebene und Zeigermodell der Komplexen Zahlen

6.3 Hyperkomplexe Zahlen

Hyperkomplexe Zahlen

Zahlbereichserweiterungen

- Mit den Komplexen Zahlen enden die Zahlbereichserweiterungen nicht.
- Mit jeder neuen Anforderung an Zahlen kommen potenziell neue Zahlbereichserweiterungen in Frage und werden durchaus auch durchgeführt.
- Die Abbildung gibt einen Einblick in weitere Zahlbereichserweiterungen.
- Die nächsten beiden Folien geben einen Ausblick auf grundlegende Aspekte von Quaternionen und Rechenoperationen auf der Menge der Quaternionen.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperkomplexe_Zahlen.svg
https://de.wikipedia.org/wiki/Hyperkomplexe_Zahl

Quaternionen

Grundlegende Aspekte

- Quaternionen erlauben eine rechnerisch elegante Beschreibung des dreidimensionalen euklidischen Raumes und anderer Räume.
- Verwendungsbeispiel:
  Berechnungs- und Darstellungsalgorithmen für Simulationen
- Jedes Quaternion lässt sich eindeutig in folgender Form schreiben:
  $$x = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$$
  mit $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$.
- Ein Quaternion kann auch als vierdimensionaler Vektor aufgefasst werden:
  $$(x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

 https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternionen https://www.youtube.com/watch?v=9AakzE0ZLaQ

Quaternionen

Einige Rechenoperationen

- $\lambda \cdot x = \lambda \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 \cdot i + \lambda \cdot x_2 \cdot j + \lambda \cdot x_3 \cdot k$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
- $x + y = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k + y_0 + y_1 \cdot i + y_2 \cdot j + y_3 \cdot k$
  $= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) \cdot i + (x_2 + y_2) \cdot j + (x_3 + y_3) \cdot k$
- $x \cdot y = (x_0, \vec{x}) \cdot (y_0, \vec{y})$
  $= (x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, x_0 \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot y_0 + \vec{x} \times \vec{y})$
- $\bar{x} = x_0 - x_1 \cdot i - x_2 \cdot j - x_3 \cdot k$
- Skalarteil: $\frac{x+\bar{x}}{2}$
- Vektorteil: $\frac{x-\bar{x}}{2}$

?

2-Minuten-Frage

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU