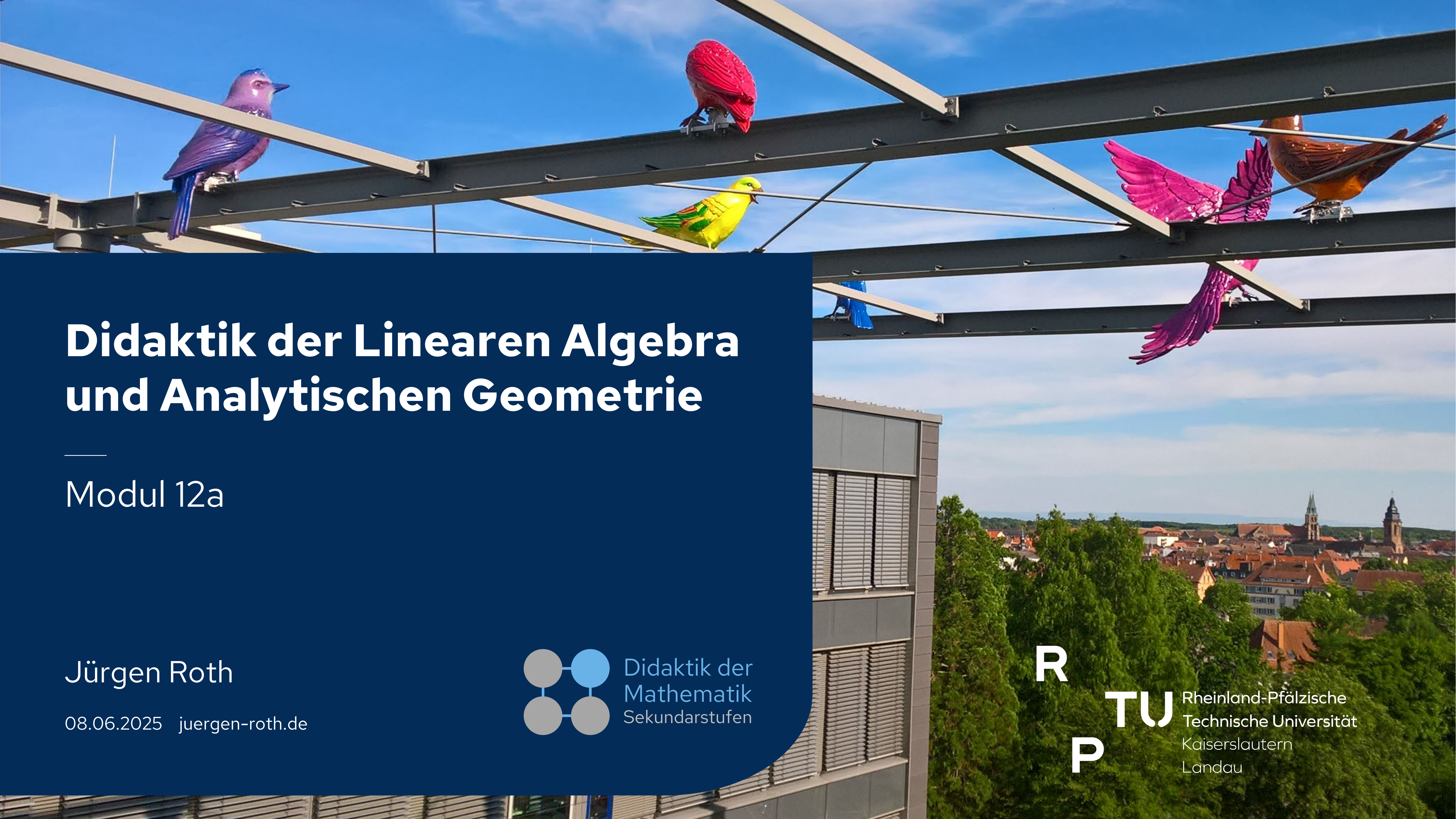


Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Modul 12a

Jürgen Roth

08.06.2025 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

1. Ziele und Inhalte
2. Algebraisieren des Anschauungsraums
3. Skalarprodukt – Längen und Winkel messen
4. Modellieren und Angewandte Mathematik
5. Kegelschnitte

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-linearen-algebra-und-analytischen-geometrie

RPTU

4

Didaktik der Linearen Algebra & Analytischen Geometrie

Modellieren und Angewandte Mathematik

Warum Modellieren und Angewandte Mathematik?

Zielrichtungen

- Die Frage nach dem „Warum?“ wird von Anfang an thematisiert.
- Begriffe, Verfahren und Strukturen
  - an konkreten Beispielen erarbeiten,
  - als Grundlage von Problemlösungen nutzen und
  - in vielfältigen Anwendungsbereichen einsetzen.

Beispiel: Marktforschung

Streaming-Dienste

- Ein Marktforschungsinstitut wird beauftragt, das Verhalten der Abo-Kunden von Streaming-Diensten zu untersuchen.
- **Ziel:** Argumente für Marketingentscheidungen liefern.

Modellannahmen

- Es gibt zwei Streaming-Dienste: GoVideo (**G**) und Hetzfix (**H**)
- Die Gesamtzahl der Kunden bleibt konstant.
- Der Marktmechanismus ändert sich nicht.

Beispiel: Marktforschung

Daten über Umfragen

- Streaming-Dienst GoVideo (**G**) hat 20.000 Kunden.
- Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) hat 30.000 Kunden.
- Pro Monat wechseln 20% der **G**-Kunden zu **H**.
- Pro Monat wechseln 5% der **H**-Kunden zu **G**.

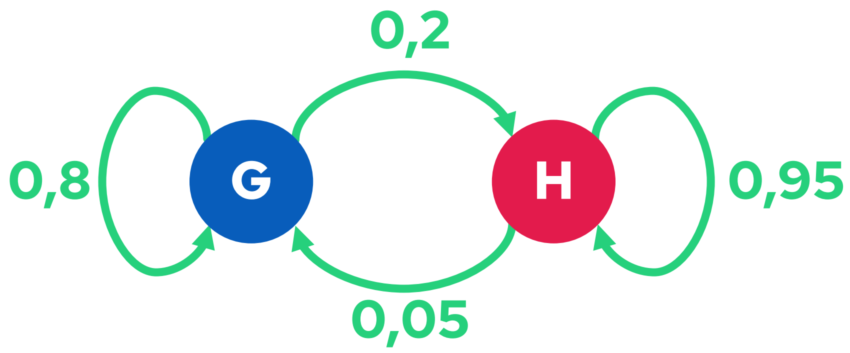
Wie entwickeln sich die Kundenzahlen?

- Abonnieren irgendwann alle den Streaming-Dienst Hetzfix (**H**)?
- Oszillieren die Kundenzahlen?
- Stellt sich ein Gleichgewicht ein?

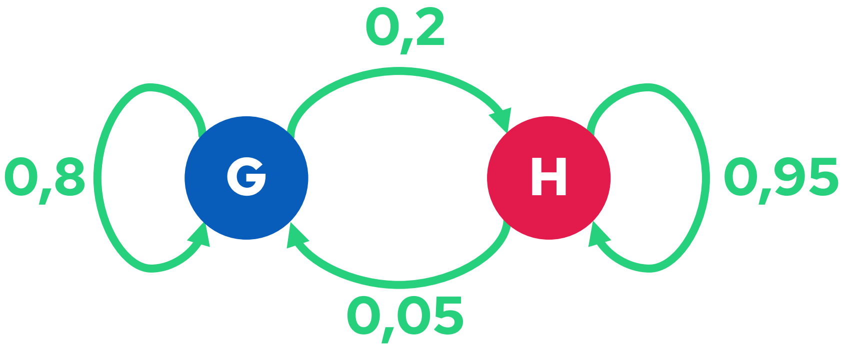
Übergangstabelle

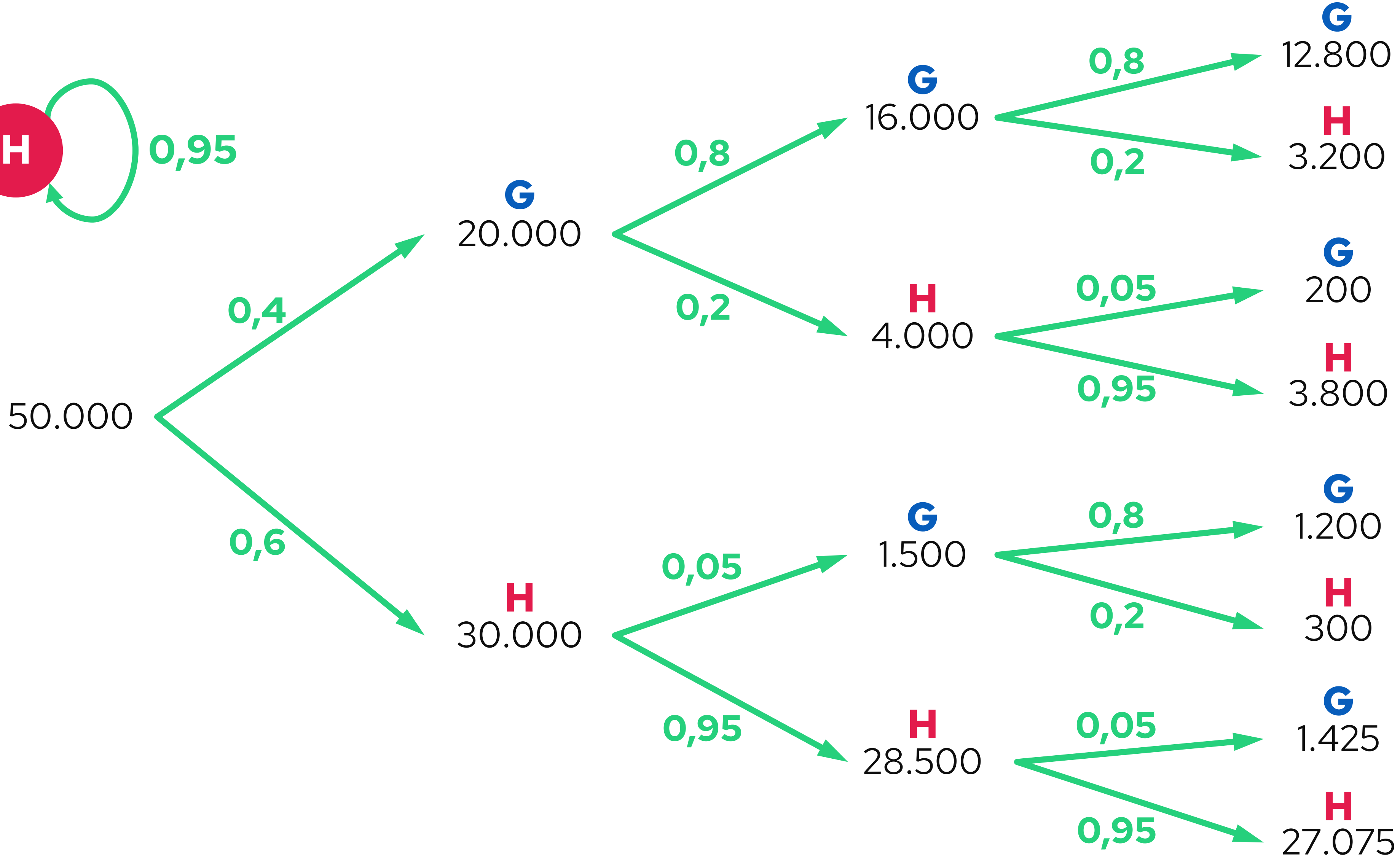
	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

Übergangsgraph



Baumdiagramm



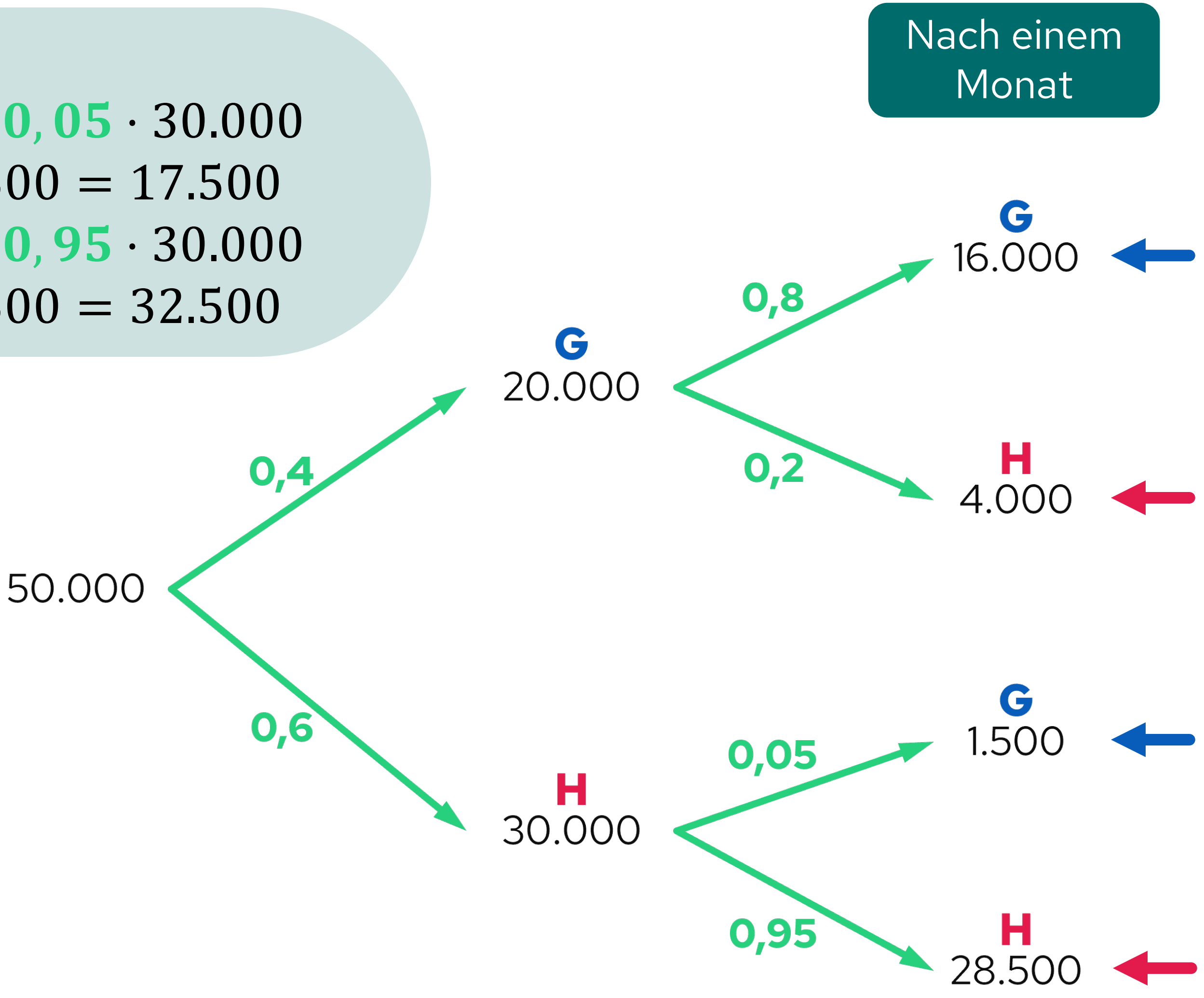


Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Nach einem Monat

Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$

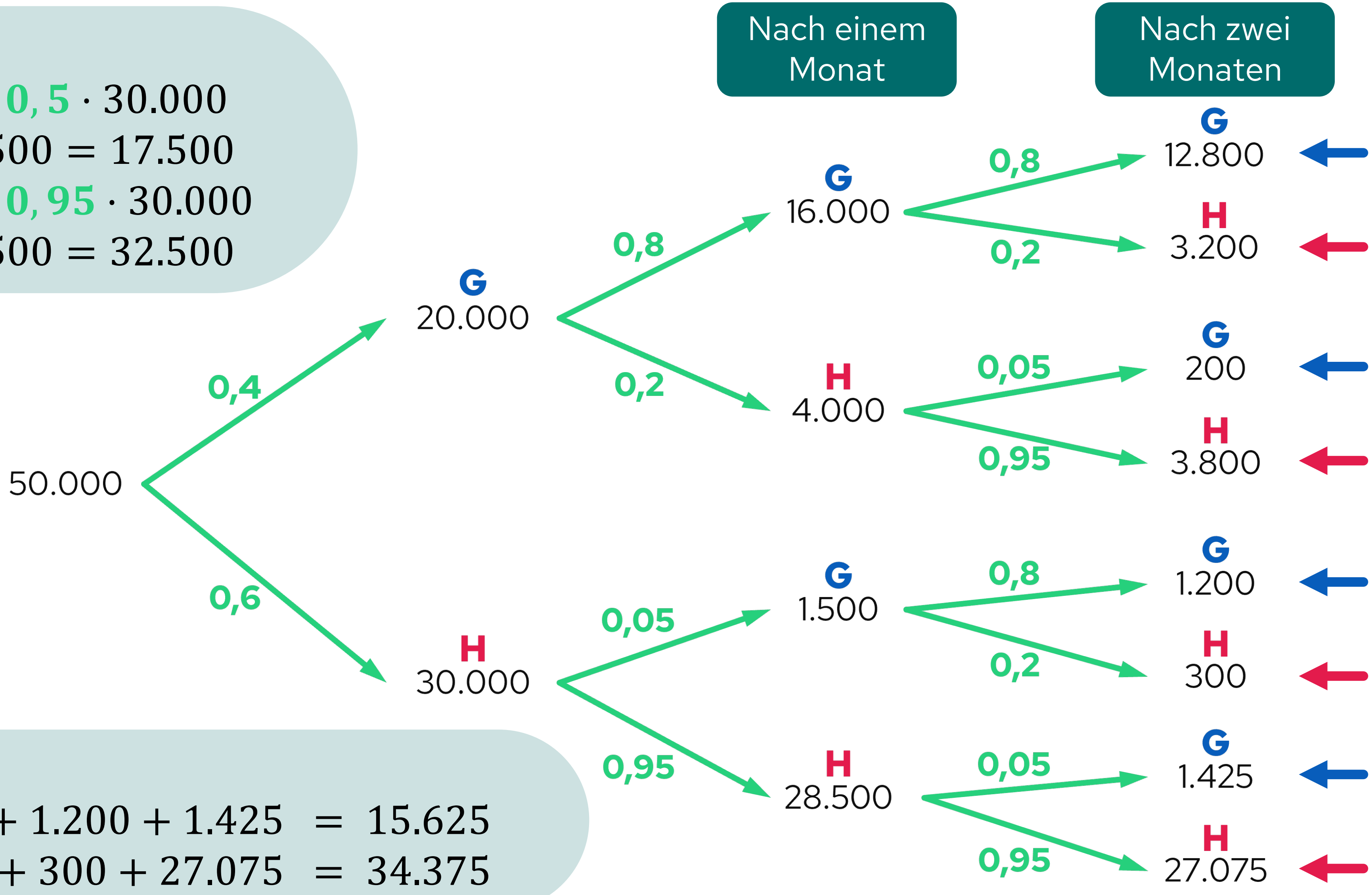


Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Nach einem Monat

→ Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,5 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

→ Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$



Nach zwei Monaten

→ Kunden **G**: $12.800 + 200 + 1.200 + 1.425 = 15.625$

→ Kunden **H**: $3.200 + 3.800 + 300 + 27.075 = 34.375$

Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

- Untersuchen Sie die Entwicklung der Kunden-Zahlen über einen Zeitraum von ...
  - 10 Monaten.
  - 100 Monaten.
- Ein Tabellenkalkulationsprogramm kann helfen ...

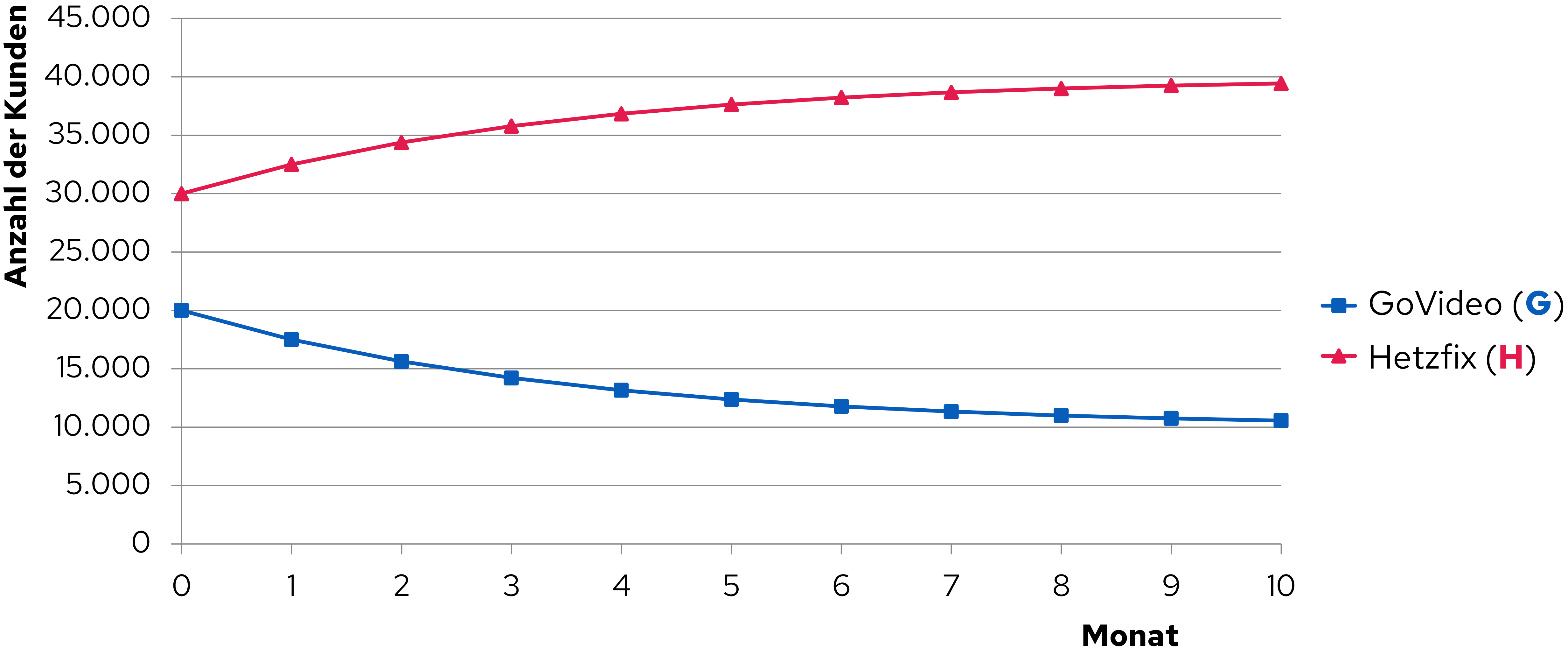
	A	B	C	D
1	G -> H	0.2		
2	H -> G	0.05		
3				
4	Monat	G	H	
5	0	20000	30000	
6	1	17500	32500	
7	2			
8	3			
9	4			
10	5			
11	6			
12	7			
13	8			
14	9			
15	10			
16				

= B5 * (1 - B1) + C5 * B2

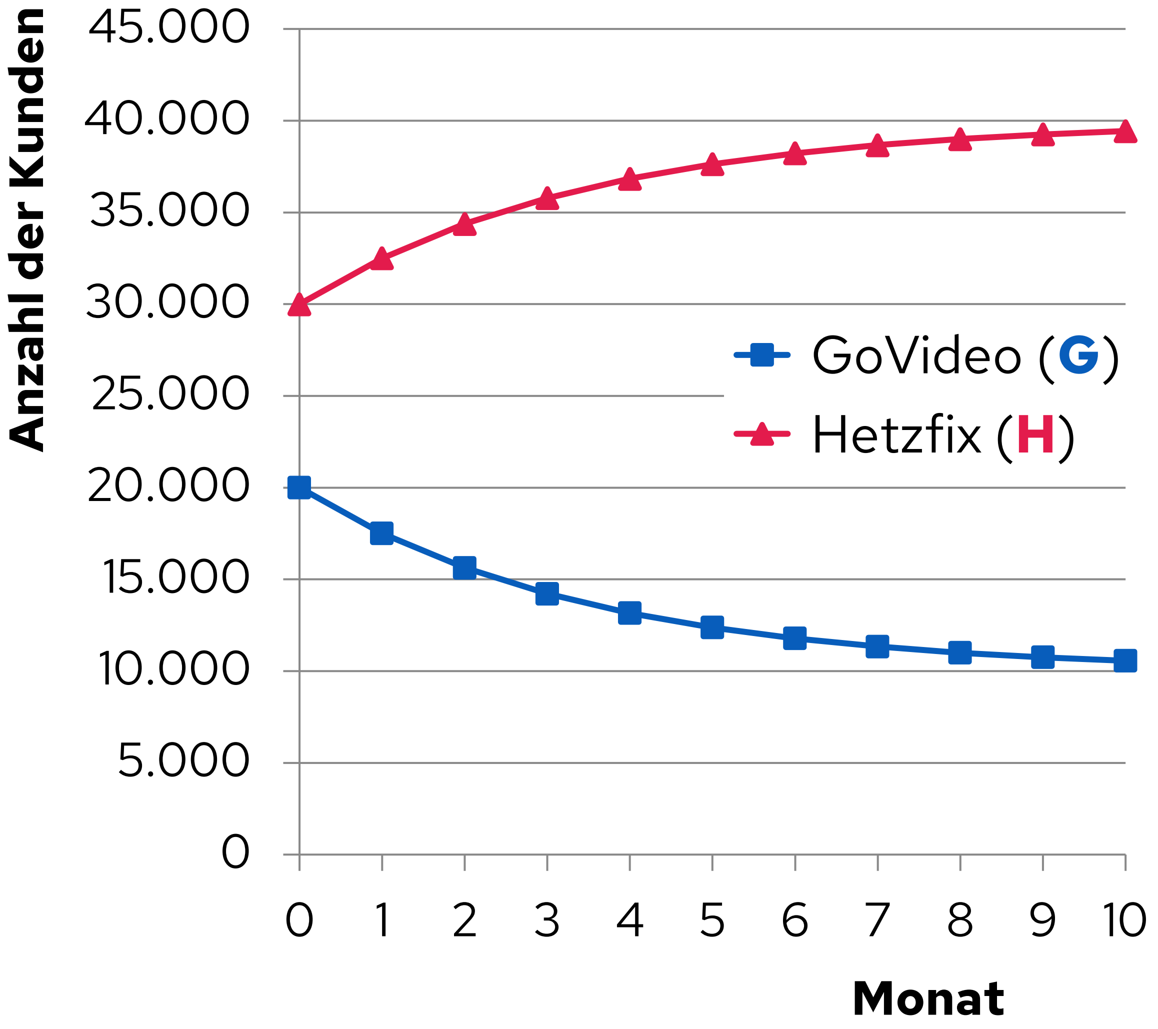
= B5 * B1 + C5 * (1 - B2)

Herunter-ziehen

Entwicklung der Kunden-Zahlen



Entwicklung der Kunden-Zahlen



Erkenntnis

Die Kunden-Zahlen von GoVideo (**G**) sinken und die von Hetzfix (**H**) steigen.

Fragen

- Halten diese Tendenzen an?
- Hat GoVideo (**G**) irgendwann keine Kunden mehr?
- Was passiert, wenn GoVideo (**G**) zu Beginn mehr bzw. noch weniger Kunden hat?

Vorgehensweisen

- Vorhersagen machen & festhalten lassen.
- Testen! (Schieberegler!)

Schematisierung

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Tabelle der Ausgangswerte

G_0	20.000
H_0	30.000

Vektor der Ausgangswerte

$$\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$

H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

1 $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

2 $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

3 $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

4 $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$

RPTU

Schematisierung

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$

H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}}_{\text{Übergangs-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}}_{\text{Ursprünglicher Kundenvektor}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}}_{\text{Kundenvektor nach einem Monat}}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem der händischen Berechnung von Folie 8!

Nach einem Monat

→ Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

→ Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$

Schematisierung

Definition: $(n \times m)$-Matrix
Ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und m Spalten heißt **$(n \times m)$-Matrix**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Eine $(n \times 1)$-Matrix heißt auch **Spaltenvektor**.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Eine $(1 \times m)$-Matrix heißt auch **Zeilenvektor**.

$$(a_1 \ldots a_m)$$

Matrizen werden mit einem Großbuchstaben abgekürzt, Vektoren mit Kleinbuchstaben & einem Pfeil darüber.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Matrix A Vektor $\vec{a}$

Schematisierung im Beispiel

Ursprünglicher Kundenvektor:

$$\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Kundenvektor nach einem Monat:

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}$$

Kundenvektor nach zwei Monaten:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{k_1}$$

Kundenvektor nach n Monaten:

$$\overrightarrow{k_n} = A \cdot \overrightarrow{k_{n-1}}$$

Schematisierung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition

Das Produkt einer (2×2)**-Matrix** mit einer (2×1)**-Matrix** (**Spaltenvektor**) wird definiert durch:

$$A \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 \\ a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 \end{pmatrix}$$

Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Eingabe von Matrizen

Eingabe von $A \coloneqq \{\{1,2,3\},\{-4,-5,-6\},\{7.1,8.2,9.3\},\{3,2,1\}\}$ liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

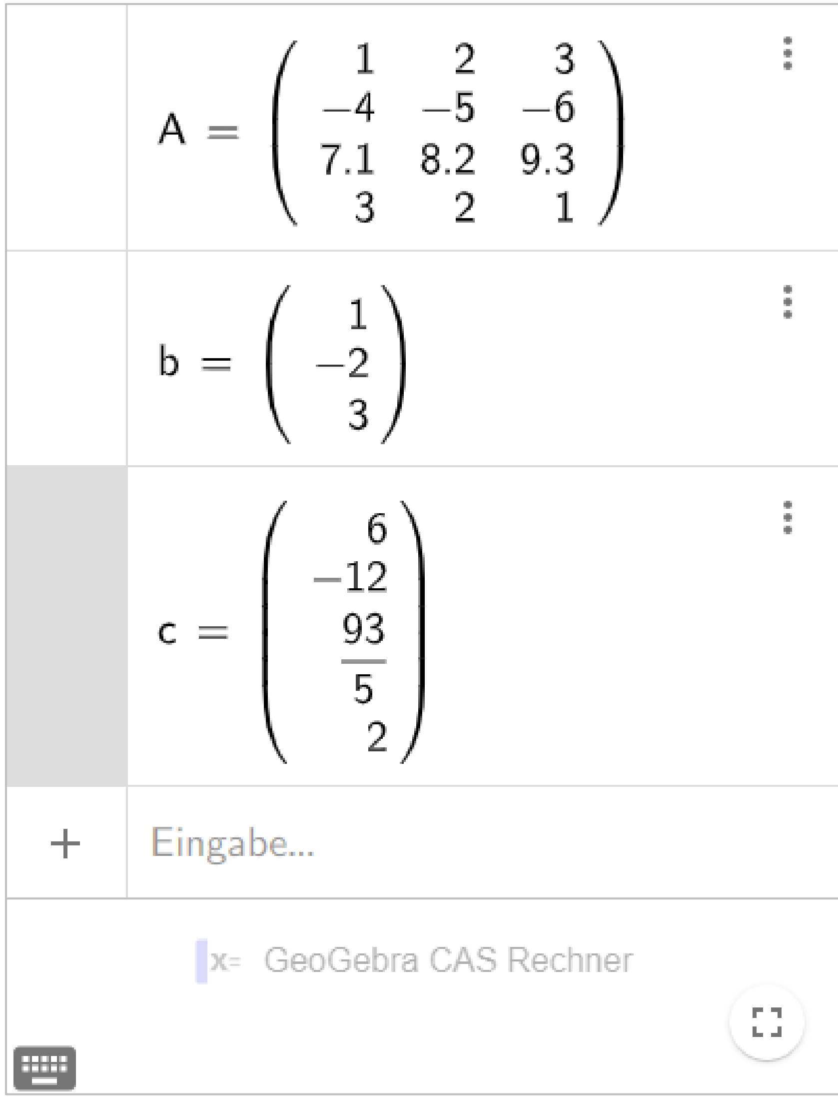
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \frac{71}{10} & \frac{41}{5} & \frac{93}{10} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: In GeoGebra Classic kann eine Matrix auch über die Eingabe in die Zellen einer Tabelle erfolgen. Die Zellen werden anschließend markiert und nach rechtem Mausklick wird im Kontextmenü → Erzeugen und → Matrix ausgewählt.

Eingabe von Vektoren

Eingabe von $b \coloneqq \{\{1\},\{-2\},\{3\}\}$ bzw. $b \coloneqq (1,-2,3)$ liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

$$b \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Matrizen multiplizieren

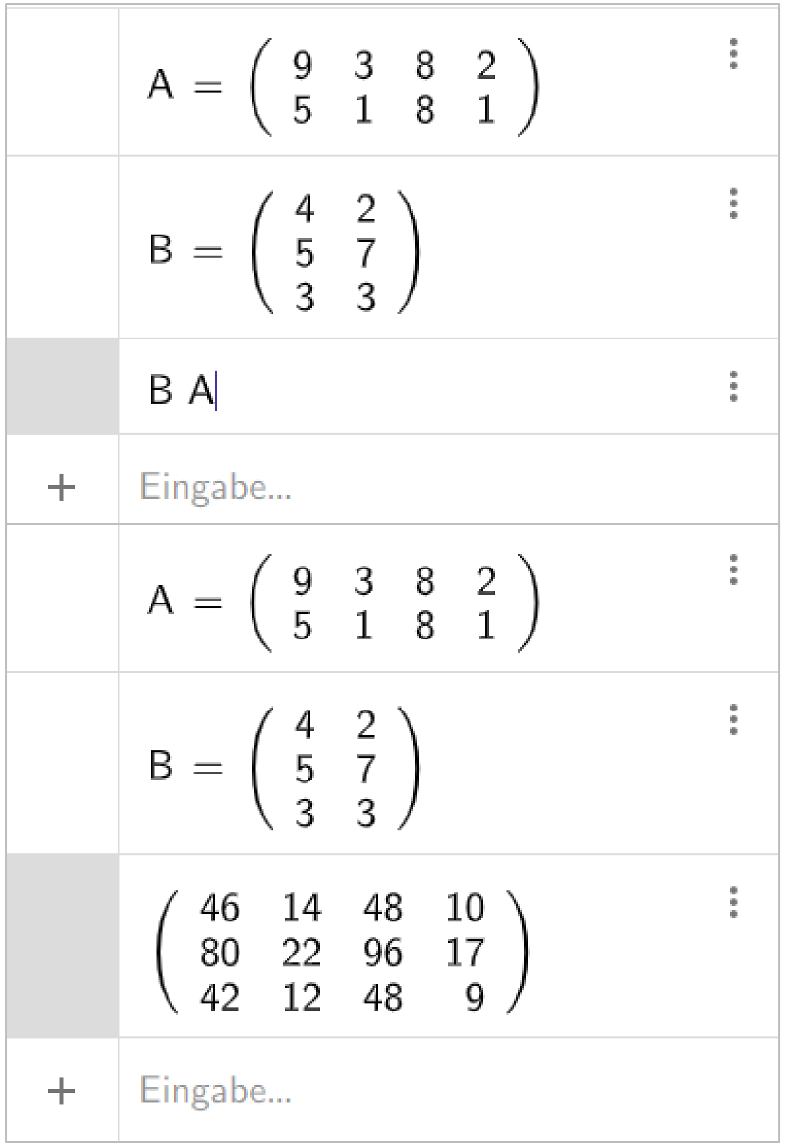
Eingabe von

$A := \{\{9{,}3{,}8{,}2\}, \{5{,}1{,}8{,}1\}\}$

$B := \{\{4{,}2\}, \{5{,}7\}, \{3{,}3\}\}$

$B * A$

liefert nach Auswahl von = und ggf. drücken der *Enter*-Taste Enter das Produkt $B \cdot A$ der Matrizen.

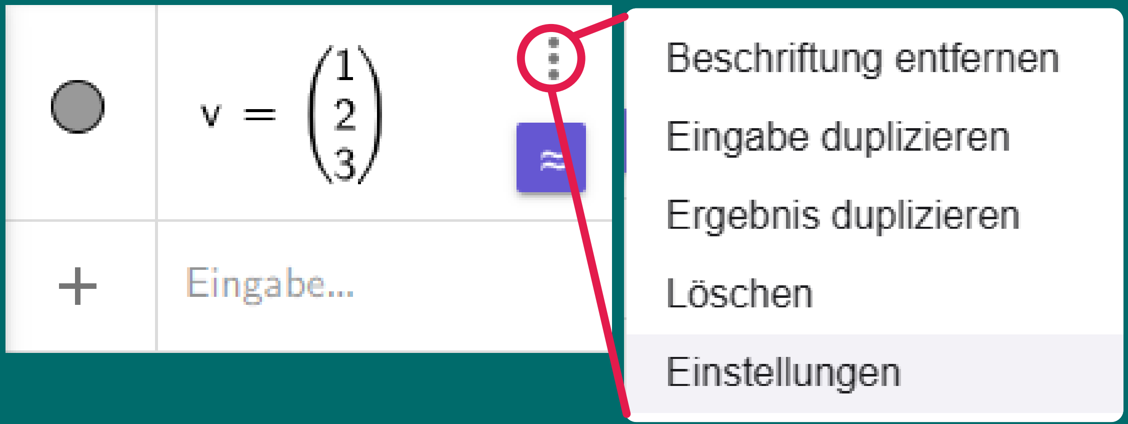


Exkurs: GeoGebra CAS

GeoGebra Classic
Zeilenbezüge in der CAS-Ansicht

- **Statische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile haben keine Auswirkungen.
  - \# kopiert die vorherige Ausgabe
  - \#3 kopiert die Ausgabe von Zeile 3
- **Dynamische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile werden übernommen.
  - $ fügt die vorherige Ausgabe ein
  - $3 fügt die Ausgabe von Zeile 3 ein

GeoGebra Suite
Zeilen kopieren in der CAS-Ansicht



Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Eingabe der Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$

Berechnung des Kundenvektors nach einem Monat: $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$

Berechnung des Kundenvektors nach zwei Monaten: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$

	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
	$k_1 = A\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
	$k_2 = A\, k_1$ $= \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

○	$k_3 = A\, k_2 = \begin{pmatrix} 14218.75 \\ 35781.25 \end{pmatrix}$
○	$k_4 = A\, k_3 = \begin{pmatrix} 13164.06 \\ 36835.94 \end{pmatrix}$
○	$k_5 = A\, k_4 = \begin{pmatrix} 12373.05 \\ 37626.95 \end{pmatrix}$
○	$k_6 = A\, k_5 = \begin{pmatrix} 11779.79 \\ 38220.21 \end{pmatrix}$

○	$k_7 = A\, k_6 = \begin{pmatrix} 11334.84 \\ 38665.16 \end{pmatrix}$
○	$k_8 = A\, k_7 = \begin{pmatrix} 11001.13 \\ 38998.87 \end{pmatrix}$
○	$k_9 = A\, k_8 = \begin{pmatrix} 10750.85 \\ 39249.15 \end{pmatrix}$
○	$k_{10} = A\, k_9 = \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

○	$k_{11} = A\, k_{10} = \begin{pmatrix} 10422.35 \\ 39577.65 \end{pmatrix}$
○	$k_{12} = A\, k_{11} = \begin{pmatrix} 10316.76 \\ 39683.24 \end{pmatrix}$
○	$k_{13} = A\, k_{12} = \begin{pmatrix} 10237.57 \\ 39762.43 \end{pmatrix}$
○	$k_{14} = A\, k_{13} = \begin{pmatrix} 10178.18 \\ 39821.82 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Iterative Berechnung

- Die Kunden-Zahlen nach zwei Monaten wurden so berechnet:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right)$$

- Will man die Kunden-Zahlen nicht iterativ sondern direkt berechnen, dann müsste das so funktionieren:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right) = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$$

- Dazu muss eine Multiplikation von Matrizen definiert werden.

- Dann könnte man auch $\overrightarrow{k_n}$ direkt berechnen:

$$\overrightarrow{k_n} = A^n \cdot \overrightarrow{k_0}$$

Berechnung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_2}$

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot A \cdot \overrightarrow{k_0} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{11}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{12}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{12}a_{22} \cdot k_{0_2} \\ a_{21}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{21}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{22}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22}a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \cdot k_{0_2} \\ (a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}) \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}}_{= A \cdot A =: A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix}}_{= \overrightarrow{k_0}}$$

Matrizenmultiplikation

Definition

Die Multiplikation einer (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit sich selbst ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Vorgehensweise bei der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} 1\;3 & 2\;4 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} := \begin{pmatrix} \overset{1}{\boxed{a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}}} & \overset{2}{\boxed{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}}} \\ \underset{3}{\boxed{a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}}} & \underset{4}{\boxed{a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}}} \end{pmatrix}$$

- Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern.
- Damit sie funktioniert, muss die Anzahl der Spalten der linken Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix sein!

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Prognose ist nun ohne Iteration möglich

$$\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{k_2} = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{k_{10}} = A^{10} \cdot \overrightarrow{k_0}$$

○	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
○	$k_1 = A\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
○	$k_2 = A^2\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$
○	$k_{10} = A^{10}\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

○	$k_{20} = A^{20}\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 10031.71 \\ 39968.29 \end{pmatrix}$
○	$k_{30} = A^{30}\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 10001.79 \\ 39998.21 \end{pmatrix}$
○	$k_{40} = A^{40}\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 10000.1 \\ 39999.9 \end{pmatrix}$
○	$k_{100} = A^{100}\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{k_{30}} = A^{20} \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{k_{30}} = A^{30} \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{k_{40}} = A^{40} \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{k_{100}} = A^{100} \cdot \overrightarrow{k_0}$$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Stabiler Kundenvektor

- Es gibt offensichtlich nach einer bestimmten Anzahl von Monaten einen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$.
- Obwohl weiterhin in jedem Monat Kunden den Streaming-Dienst wechseln, bleiben die Kundenzahlen der beiden Streaming-Dienste konstant.
- Man sagt, es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.
- Für diesen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ muss gelten:

$$A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$$

- Aus dieser Gleichung kann man $\overrightarrow{k_s}$ auch direkt berechnen.

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

Aus $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$

ergibt sich mit $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Als lineares Gleichungssystem geschrieben folgt:

$$\begin{aligned} 0{,}8 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= x \\ 0{,}2 \cdot x + 0{,}95 \cdot y &= y \end{aligned}$$

Zusammenfassen gleichartiger Terme liefert:

$$\begin{aligned} -0{,}2 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Dieses „Gleichungssystem“ ist nicht eindeutig lösbar.

$$0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y = 0$$

Es gilt aber zusätzlich:

$$x + y = 50.000$$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ (Fortsetzung)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \phantom{0{,}05 \cdot{}} y &= 50.000 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$x = 0{,}25 \cdot y$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$1{,}25 \cdot y = 50.000$$

Es ergibt sich folgende eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} y &= 40.000 \\ x &= 10.000 \end{aligned}$$

Stabiler Kundenvektor:

$$\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ mit (GeoGebra-)CAS

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

- Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) wie in GeoGebra kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \quad\quad\quad y &= 50.000 \end{aligned}$$

- Eingabe von

$$\text{Löse}(\{0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000\}, \{x, y\})$$

liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

$$\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$$

Löse({0.2 x − 0.05 y = 0, x + y = 50000}, {x, y})

= {{x = 10000, y = 40000}}

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Ergebnis

- Die Kundenverteilung stabilisiert sich so, dass – trotz der dynamischen Entwicklung – der Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) dauerhaft 40.000 und der Streaming-Dienst GoVideo (**G**) durchgängig 10.000 Käufer hat.
- Der stabile Kundenvektor lässt sich mit Hilfe der Gleichung $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$ und der konstanten Kundensumme berechnen.
- Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem nicht von einer speziellen Anfangsverteilung der Kunden abhängig.
- Folglich ist auch der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ unabhängig von der Anfangsverteilung der Kunden!

Entwicklung der Übergangsmatrix

Entwicklung der Übergangsmatrix

- Wie verändert sich bei diesem Prozess die Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$?
- Untersuchen Sie das mit Hilfe des CAS in GeoGebra.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse

- Offensichtlich ergibt sich eine **Grenzmatrix** A_G:

$$A_G := \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

- Wird die Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ auf den Ausgangskundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_0}}$ angewandt, dann ergibt sich direkt der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$:

$$\boldsymbol{A_G} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$$

Entwicklung der Übergangsmatrix

Ergebnisse (Fortsetzung)

- Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ und stabiler Kundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$ sind unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Statt 50.000 Kunden kann man auch 100% bzw. 1 nutzen.
- Der Anfangsvektor lässt sich dann als $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schreiben.
- Multiplikation mit der Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ liefert die erste bzw. zweite Spalte dieser Matrix:
  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$ bzw. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$
- Daraus folgt: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$
- In den Spalten der Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ steht jeweils der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$.

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU