Didaktik der Grundschulmathematik

Inhaltsverzeichnis

Didaktik der Grundschulmathematik

Didaktik der Grundschulmathematik

Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

Homepage zur Veranstaltung

http://www.juergen-roth.de ➔ Lehre

Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

5.1 Grundsätzliches

Leitlinien für die Erarbeitung

Vorkenntnisse

- Notwendige Vorkenntnisse sichern
- An Vorkenntnisse anknüpfen

Fundierung

- Notwendigkeit der Verfahren anhand von Beispielen einsichtig machen
- Von passenden Sachsituationen ausgehen
- Handlungsgrundlagen der Algorithmen behandeln
- Immer wieder Anwendungen einbeziehen ⇨ Sachaufgaben

Verständnis

- Verfahren auch nach der Einführung häufig erläutern (lassen)
- Übungen zur Vertiefung des Verständnisses der Verfahren

Probleme

- Mögliche Klippen im Lernprozess frühzeitig berücksichtigen
- Frühzeitig auf Fehler achten, deren Ursachen identifizieren und individuelle Hilfestellungen geben.

Normalverfahren – Vorteile

- **KMK-Beschlüsse schreiben für die schriftlichen Rechenverfahren die Schreibweisen und zumindest bei der Subtraktion auch explizit die Sprechweise vor!**
  - Hohe Rechensicherheit durch
    - schematische/einprägsame Abfolge der Einzelschritte des Verfahrens
    - weitgehende Ausschaltung potentieller Fehlerquellen.
  - Starke Denkökonomie durch die Entlastung des Gedächtnisses
    - Konzentration auf die eigentlichen Probleme innerhalb einer Aufgabe wird möglich
  - Große Steigerung der Schnelligkeit.
  - Standardisierung
    - Verminderung von Schwierigkeiten bei Orts- oder Schulwechsel
    - Hilfe für die langfristige Sicherung des Lernerfolges.

Normalverfahren – Nachteile

- **Komplexität und oft komprimierte Kurzfassung vieler Normalverfahren**
  - Gefahr: Bei der Einführung werden zu viele Teilschritte auf einmal behandelt.
  - Schüler werden unsicher, verwechseln Teilschritte, ändern sie fehlerhaft ab oder vergessen sie.
- **Zu frühe Automatisierung der Normalverfahren**
  - Mangelhaftes Verstehen
  - Verfahren kann im Falle von Unsicherheit oder Vergessen nur sehr schwer oder gar nicht rekonstruiert werden.
- **Normalverfahren können auch rein mechanisch ohne Einsicht in die Zusammenhänge korrekt durchgeführt werden.**
  - Unverstanden übernommene und angewandte Mechanismen führen zur Ausbildung von typischen Fehlern.

Normalverfahren – Nachteile

- **Zerlegung der Zahlen in ihre Stellenwerte**
  - Zahlen werden nicht mehr als Ganzes, sondern nur noch als Ansammlung von Ziffern aufgefasst.
- **Rechnungen werden ausschließlich durch Manipulationen auf der symbolischen Ebene durchgeführt.**
  - Schwerwiegende Fehler (z. B. die falsche Größenordnung eines Ergebnisses) werden nicht mehr wahrgenommen.
- **Schriftlichen Rechenverfahren basieren nicht auf ganzheitlichen Zahlvorstellungen.**
  - Kaum Unterstützung des Zahlverständnisses.
- **Normalverfahren verführen dazu, sie ständig anzuwenden**
  - Leider auch in Fällen, wo andere Wege leichter zum Ziel führen.

Normalverfahren – Gegensteuern

- **Die Schüler sollten zunächst verschiedene Lösungswege soweit wie möglich selbständig erarbeiten bzw. zumindest kennen lernen.**
  - Erst auf dieser Grundlage wird allmählich zum Normalverfahren als einem besonders zweckmäßigen und ökonomischen Verfahren hingearbeitet.
- **Normalverfahren sollten nicht am Anfang stehen, sondern die Endform eines längeren Prozesses sein.**
- **Ein gründliches Verständnis der Normalverfahren ist für ihre sichere Beherrschung äußerst wichtig.**
  - Alle Teilschritte und den Gesamtablauf des Normalverfahrens sehr sorgfältig zu entwickeln. (Auch sprachliche Formulierungen!)
  - Einsicht in das Normal-verfahren auch in der Automatisierungsphase durch entsprechende Aufgabenstellungen bewusst lebendig halten.

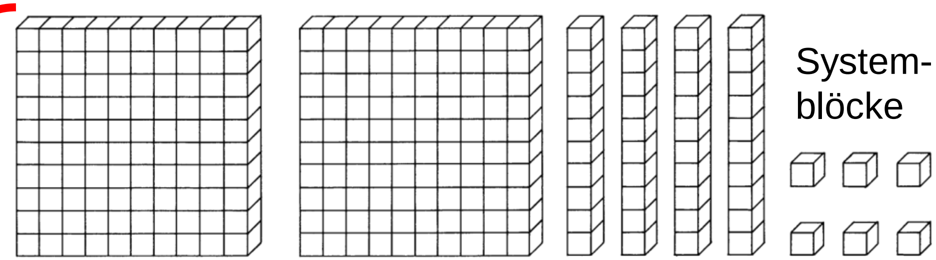
Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

5.2 Schriftliche Addition

Nötige Voraussetzungen

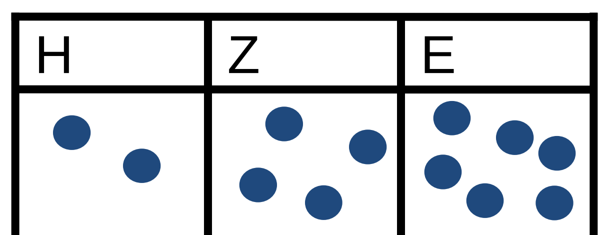
- **Kenntnis des kleinen 1 + 1**
- **Verständnis des Bündelungsprinzips**
- **Verständnis der Stellenwertschreibweise**
- **Vorübung: Zahldarstellungen**
  - mit Material
  - zeichnerisch
  - symbolisch

Wichtig: Übersetzungsübungen zwischen den Darstellungsformen!

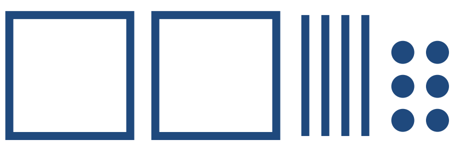


System-blöcke

Rechengeld



Stellentafel mit Wendeplättchen



H	Z	E
2	4	6

246

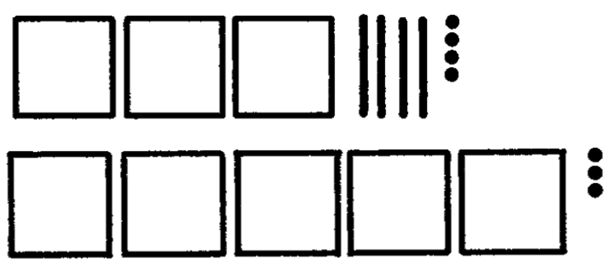
Diagnostische Aufgaben

Vorauszusetzende Grundaufgaben:

3 + 5	7 + 6	9 + 0	3 + 8 + 1
6 + 2	8 + 5	7 + 0	5 + 7 + 2
1 + 7	4 + 9	0 + 4	3 + 0 + 9
. . .			

Bündeln und Stellenwertbegriff:

∗ Welche Zahlen sind dargestellt?



∗ Lege oder zeichne dazu.

718 , 566 , 1096 . . .

Diagnostische Aufgaben

* Wandle um.

791 = __ H + __ Z + __ E
908 = __ H + __ Z + __ E
6 H + 5 Z + 4 E = ___
0 H + 9 Z + 0 E = ___

* Schreibe in eine Stellentafel.

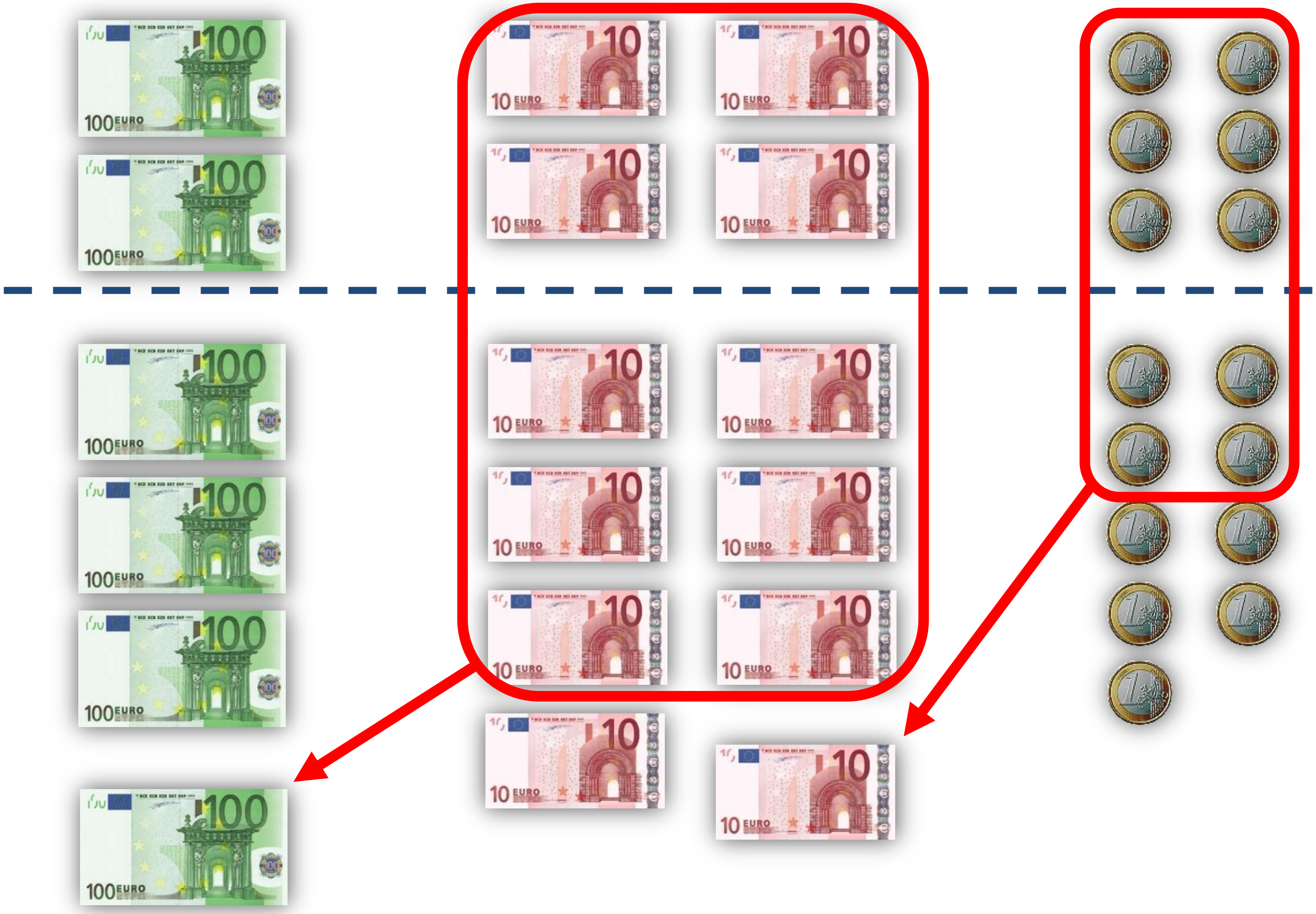
1598

	T	H	Z	E

* Schreibe richtig untereinander.

528 + 677 , 28 + 809 , 954 + 70
23 + 1088 + 270 . . .

246 + 379



Passende Sachsituation

Halbschriftlich rechnen:

WÜ – Ul – M

162 + 115 =

100 + 100 = 200

60 + 10 = 70

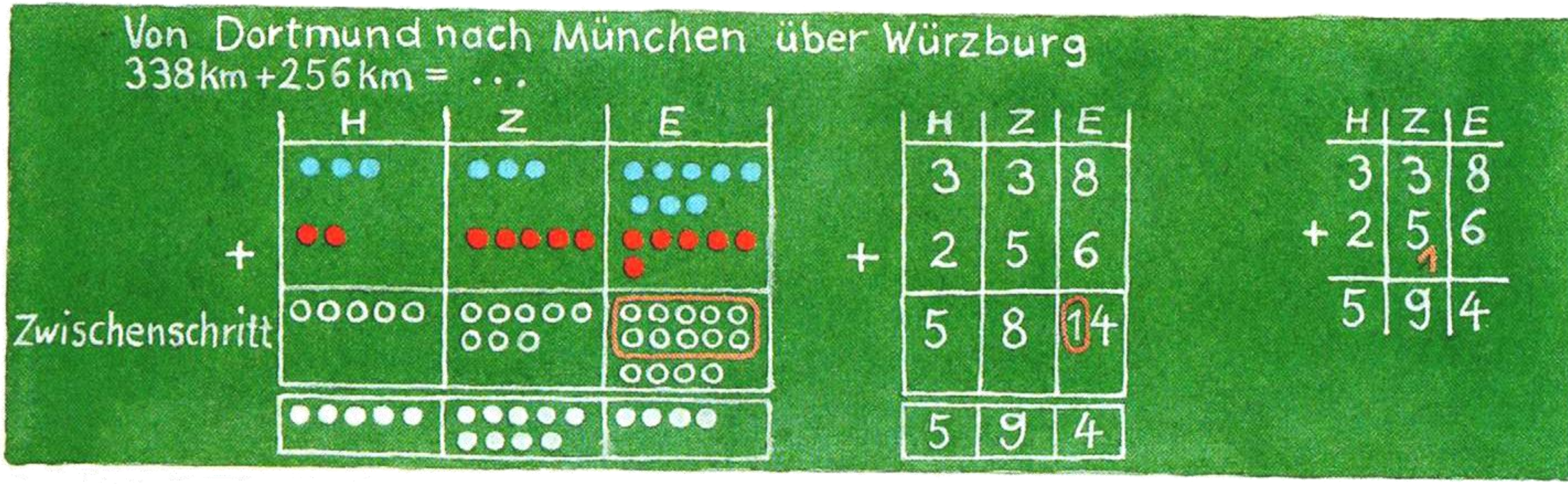
2 + 5 = 7

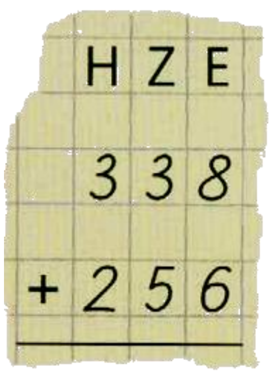
Schriftlich rechnen:

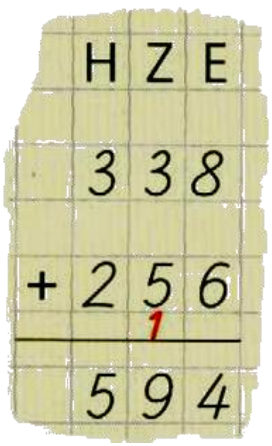
	H	Z	E
	1	6	2
+	1	1	5
	2	7	7

	H	Z	E
	1	6	2
+	1	1	5
	2	7	7

Fortschreitende Schematisierung







Berechne erst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter.

Achte auf die Überträge.

Sprich: 6 + 8 = 14. Schreibe 4, übertrage 1.

6 + 3 = 9. Schreibe 9.

2 + 3 = 5. Schreibe 5.

Das Ergebnis beträgt 594.

Sprachliche Formulierung

Abstufungen in der sprachlichen Formulierung von einer ausführlichen, inhaltlichen Sprechweise bis hin zur Kurzform!

(1) 8 Einer plus 4 Einer gleich 12 Einer

1 Zehner, 2 Einer

1 Zehner plus 2 Zehner gleich 3 Zehner,
plus 5 Zehner gleich 8 Zehner

4 Hunderter plus 2 Hunderter gleich 6 Hunderter

(2) 8 plus 4 gleich 12

1 plus 2 gleich 3, plus 5 gleich 8

4 plus 2 gleich 6

(3) 8, 12

1, 3, 8

4, 6

$$\begin{array}{r} 2\ \ 5\ \ 4 \\ +\ 4\ \ 2_1\ 8 \\ \hline 6\ \ 8\ \ 2 \end{array}$$

Festigung des Additionskalküls

Tintenklecksaufgaben

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 5 & 4 \\ + & & & \\ \hline & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ + & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 5 & \\ + & & 2 & 8 \\ \hline & 6 & & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & & 4 \\ + & & 2 & \\ \hline & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

Schwierigkeiten und Fehler

Übertragungsfehler

$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 8 \\ +\,2\ 5\ 4 \\ \hline 5\ 1\ 2 \end{array}$$

Der Übertrag wird nicht berücksichtigt.

$$\begin{array}{r} 2\ 7\ 9 \\ +\,3_{1}1\ 4 \\ \hline 6\ 8\ 3 \end{array}$$

Übertrag in die falsche Stelle.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 6 \\ +\,2\ 4_{1}3 \\ \hline 5\ 7\ 9 \end{array}$$

Übertrag zu viel.

Schwierigkeiten und Fehler

- **Kein Übertrag…**

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 6 & 8 \\ + & & 7_{1} & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 3 \end{array}$$

… in die leere Stelle.

$$\begin{array}{rrrr} & & 6 & 8 \\ + & 3 & 7_{1} & 5 \\ \hline & 3 & 4 & 3 \end{array}$$

… in die zusätzliche Stelle

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

… zur Null.

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 1 & 8 \\ + & 4_{1} & 9 & 3 \\ \hline & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

… zur 9

Schwierigkeiten und Fehler

- **Maßnahmen bei Übertragungsfehlern:**
  - Jeweilige Addition noch einmal mit Hilfe von Material lösen.
  - Konsequente Notation der Übertragungsziffer.
  - Zusammenhang zwischen Schreiben und Sprechen bei den Überträgen beachten.
  - Freilassen einer vollen Kästchenzeile zwischen dem letzten Summanden und dem Summenstrich für die Übertragungsziffern (Effekt von Bestimmungslücken).
  - Notieren der Übertragungsziffern unter die Spalte.
- **Weitere Fehlertypen:**
  - Addition von vorn
  - Fehler mit der Null
  - Fehler beim kleinen 1 + 1
  - Nicht stellengerechte Schreibweise der Zahlen
  - Perseveration

Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

5.3 Schriftliche Subtraktion

Abzieh- / Ergänzungsverfahren

Abziehverfahren

$17 - 9 = 8$

„17 minus 9 gleich 8 (betont!)."

Ergänzungsverfahren

$9 + \square = 17$

„9 plus 8 (betont!) gleich 17."

Mündliche Subtraktion: Die Entscheidung für ein Verfahren ist von der Sachsituation und von den gegebenen Zahlen abhängig.

874 – 69
Abziehen naheliegender

1005 – 998
Ergänzen naheliegender

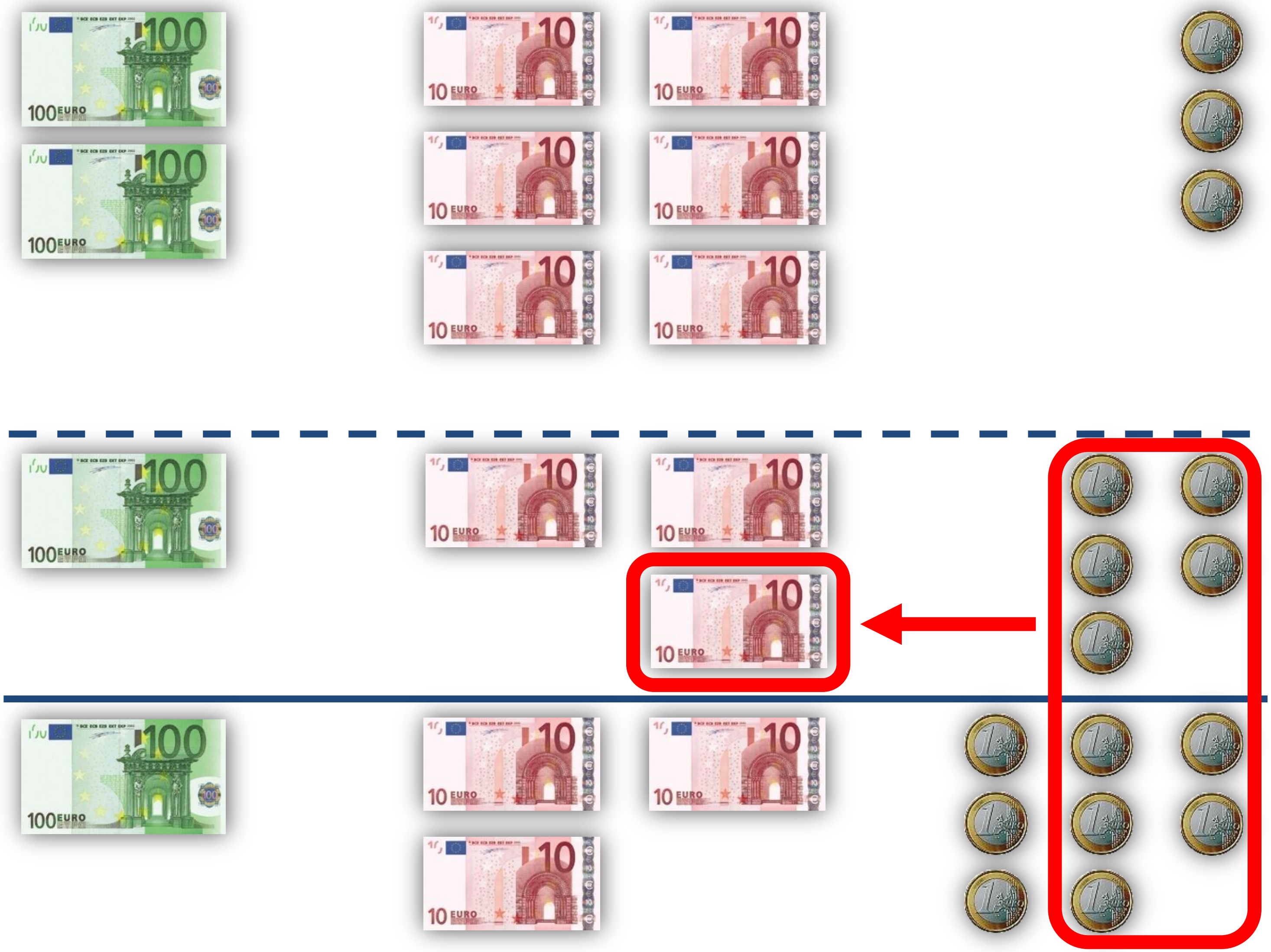
Schriftl. Subtraktion: Schreibweise gleich, Sprechweise unterschiedlich.

4 minus 2 gleich 2	7 5 4	2 plus 2 gleich 4
5 minus 4 gleich 1	– 3 4 2	4 plus 1 gleich 5
7 minus 3 gleich 4	4 1 2	3 plus 4 gleich 7

Abzieh- / Ergänzungsverfahren
Vorteile

- **Abziehverfahren**
  - Abziehen ist bei der Subtraktion naheliegender.
  - Weniger Fehler durch Verwechslung mit der Addition.
  - Schreib- und Sprechweise analog.
  - Lebensnahe Sachaufgaben beruhen meist auf dem Wegnehmen, also Abziehen.
- **Ergänzungsverfahren**
  - Es wird nur das $1 + 1$ und nicht das $1 - 1$ benötigt.
  - Vorwärtszählen wird besser beherrscht als das Rückwärtszählen.
  - Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird unmittelbar deutlich.
  - Herausgabe von Wechselgeld (vertraute Situation) erfolgt im Sinne des Ergänzens.

263 – 125 Auffüllen



Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 2\;6\;3 \\ -1\;2\;5 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Umdeutung als Addition:

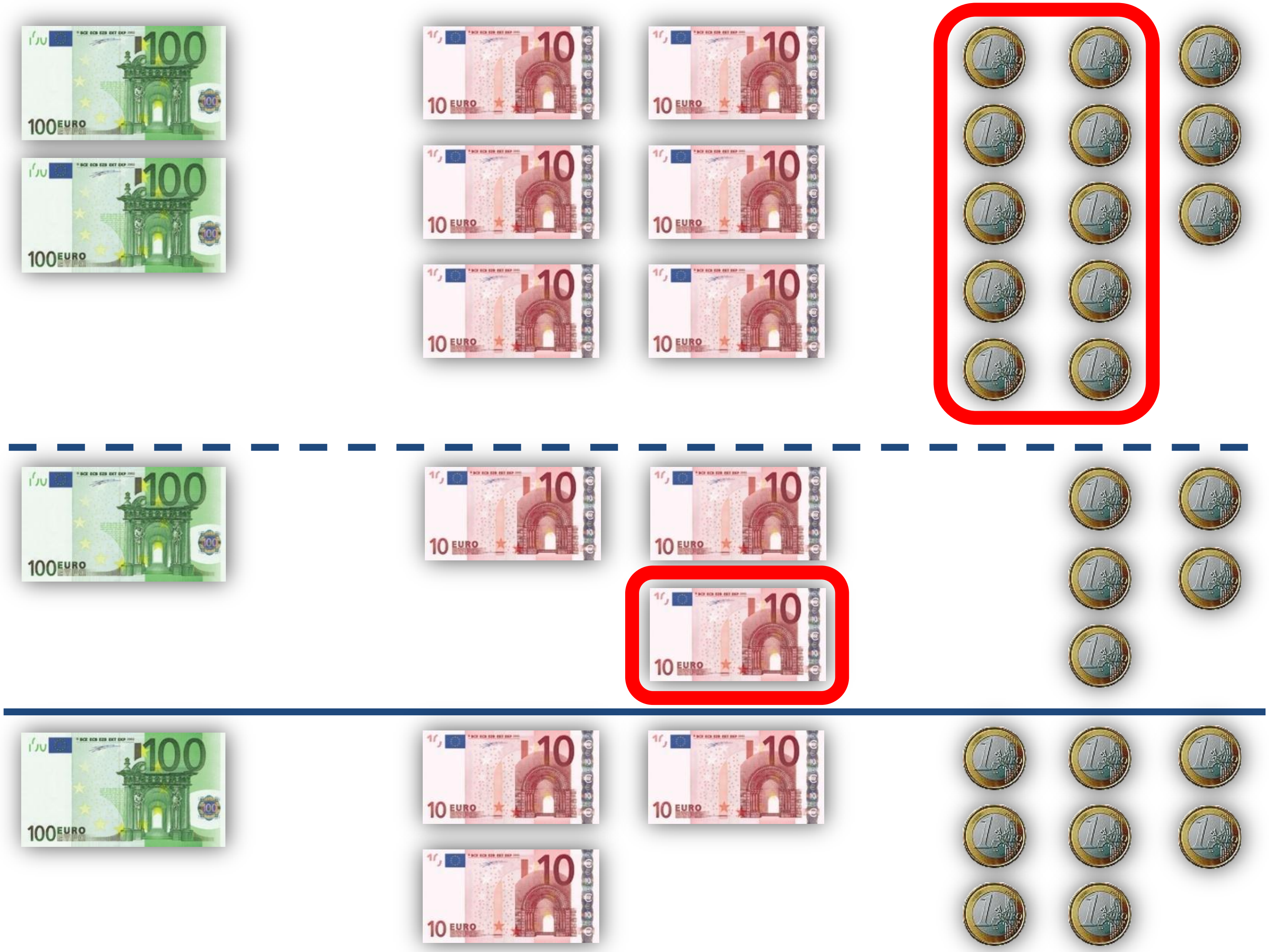
$$\begin{array}{r} 2\;6\;3 \\ \hline +1\;2\;5 \\ \boxed{} \end{array}$$

Kurz:

$$\begin{array}{r} 2\;6\;3 \\ -1\;2_{1}\;5 \\ \hline 1\;3\;8 \end{array}$$

Gleichsinniges Ergänzen

263 – 125 Erweitern



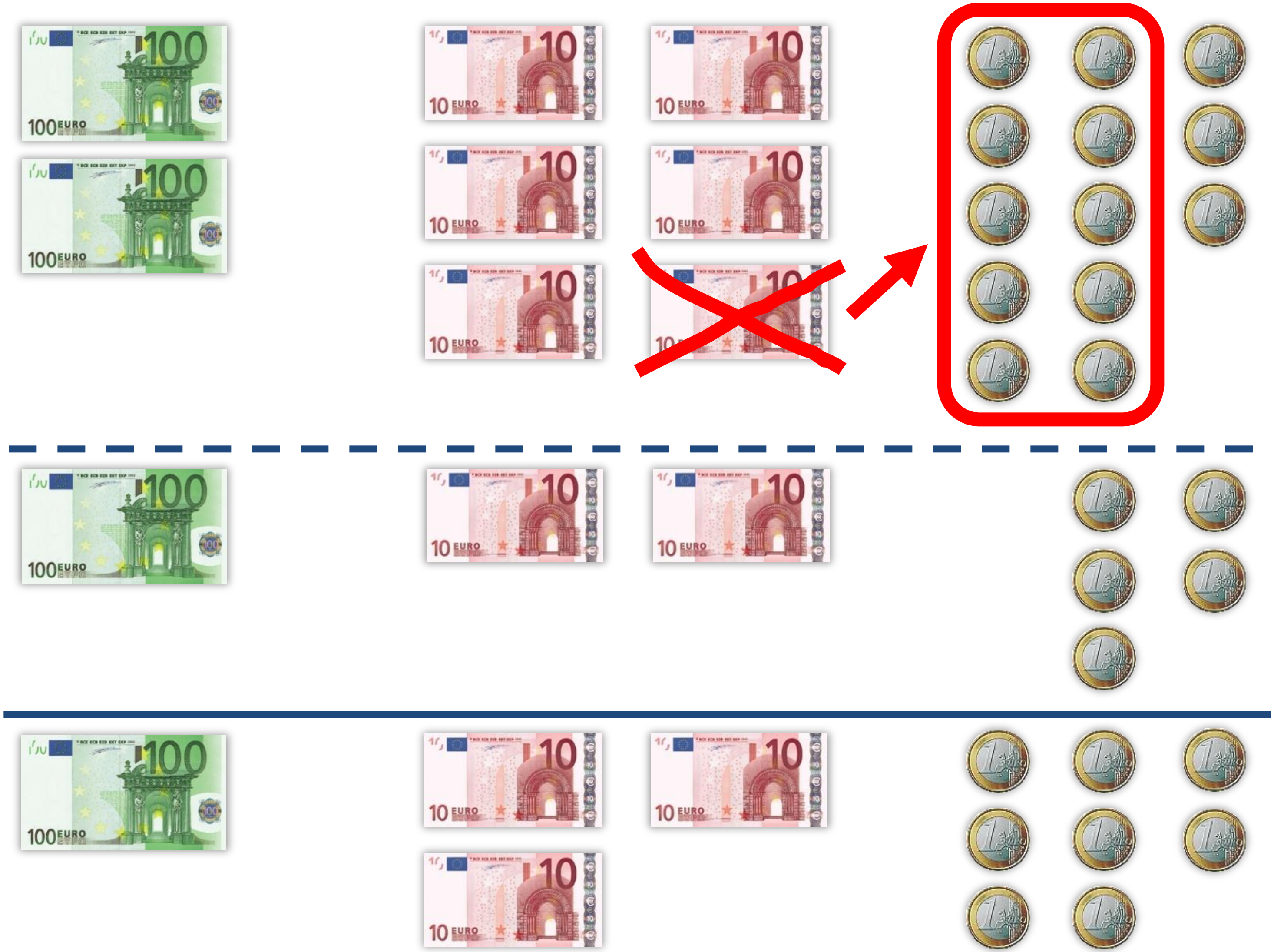
Ausführlich:

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 3^{10} \\ -1\ 2_{1}\ 5 \\ \hline 1\ 3\ 8 \end{array}$$

Kurz:

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 3 \\ -1\ 2_{1}\ 5 \\ \hline 1\ 3\ 8 \end{array}$$

263 – 125 Entbündeln



Ausführlich:

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & \overset{5}{\cancel{6}} & {}^{10}3 \\ - & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 8 \end{array}$$

Kurz:

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & \overset{5}{\cancel{6}} & 3 \\ - & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 8 \end{array}$$

263 – 125 Entbündeln

Typisierung von Subtraktionsverfahren

Übertrags-techni-ken / Verfahren	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	+	+	–
Ergänzen	+	+	+

(grau) Früher die einzigen von der KMK zugelassenen Verfahren.

(gelb) Heute vielfach bevorzugtes Verfahren. (International schon sehr lange!)

Abziehverfahren

(Lehrplan Bayern)

- **„anfangs individuelle Sprech- und Schreibweise zulassen, z. B.:**
  - „Zwei Einer minus sieben Einer geht nicht.
    Ich wechsle einen Zehner in zehn Einer und behalte drei Zehner.
    Zwölf Einer minus sieben Einer gleich fünf Einer ...“
- **Stellenwerte kennzeichnen**
- **Entbündelungen ausführlich notieren, z. B.**
- **schrittweise zur Endform hinführen**
- **leistungsschwächere Schüler: Material und Hilfsnotation so lange wie nötig“**

	H	Z	E	
	7	13	12	
	~~8~~	~~4~~	~~2~~	
-		9	7	
	7	4	5	

Abziehverfahren

(Lehrplan Bayern Anhang)

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{7}{\cancel{8}} & \overset{4}{\cancel{5}} & 3 \\
- & 2 & 7 & 6 \\
\hline
 & 5 & 7 & 7
\end{array}
$$

Entbündeln

3 minus 6 geht nicht;

eins herüber bleibt 4;

13 minus 6 gleich 7;

4 minus 7 geht nicht;

eins herüber bleibt 7;

14 minus 7 gleich 7;

7 minus 2 gleich 5;

Abziehverfahren

(Lehrplan Bayern Anhang)

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{5}{\cancel{6}} & \overset{9}{\cancel{0}} & 3 \\
- & 3 & 7 & 5 \\
\hline
 & 2 & 2 & 8
\end{array}
$$

3 minus 5 geht nicht;

eins herüber bleibt 59;

13 minus 5 gleich 8;

9 minus 7 gleich 2;

5 minus 3 gleich 2;

- **Ergänzungsverfahren**
  - „evtl. Ergänzungsverfahren erarbeiten, individuell anwenden
  - Ergänzen ohne und mit Übertrag
  - mit Arbeitsmitteln darstellen, in die Stellenwerttafel eintragen, schrittweise zur Endform hinführen (siehe Anhang)“

Ergänzungsverfahren
(Lehrplan Bayern Anhang)

$$
\begin{array}{r}
8\ 5\ 3 \\
-\ 2_1\ 7_1\ 6 \\
\hline
5\ 7\ 7
\end{array}
$$

Auffüllen

6 plus 7 gleich 13;

7 an, eins gemerkt;

8 plus 7 gleich 15;

7 an, eins gemerkt;

3 plus 5 gleich 8;

5 an;

Kriterien zur Beurteilung der Verfahren

- **Verständnis**
  - Ist es gut verstehbar und leicht zu begründen?
    ⇨ Entbündeln 80%, sonstige Verfahren ca. 10%
- **Prägnanz**
  - Liegt eine gut erinnerbare, zentrale Leitidee des MU zugrunde oder Tricks? ⇨ Entbündeln!
- **Anwendung**
  - Ist das Verfahren im Hinblick auf den Relitätsbezug naheliegend?
  - Besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Herleitungsweg und wichtigen Verwendungssituationen?
- **Veranschaulichung**
  - Lassen sich Veranschaulichungsmittel (z.B. Rechengeld) bei der Herleitung mit Gewinn einsetzen?

Kriterien zur Beurteilung der Verfahren

- **Selbständige Entdeckung**
  - Können die Schülerinnen und Schüler die Herleitung weitgehend selbständig entdecken?
    ⇨ Am Häufigsten beim Entbündeln!
- **Anknüpfung an die halbschriftliche Subtraktion**

$65 - 38$	$65 - 38$	$65 - 38$
$15 - 8 = 7$	$38 + \square = 65$	$38 + \square = 65$
$50 - 30 = 20$	$38 + 7 = 45$	$48 + \square = 75$
$65 - 38 = 27$	$45 + 20 = 65$	$8 + 7 = 15$
	$38 + 27 = 65$	$40 + 20 = 60$
		$48 + 27 = 75$

- **Fehlerhäufigkeit**
- **Sonderfälle**
  - Müssen Sonderfälle getrennt behandelt werden?
- **Lösungsdauer**

Einschätzung nach Padberg

Beurteilungskriterien	Entbündeln Abziehen	Erweitern Ergänzen	Auffüllen Ergänzen
Verständnis	+	–	0
Prägnanz	+	–	+
Anwendung			
a) Wegnehmen	+	–	–
b) Vergleichen	+	+	+
c) Ergänzen	–	0	+
Veranschaulichung	+	+	0
Selbstst. Entdeckung	+	–	0
Halbschriftl. Subtraktion	+	0	+
Fehlerhäufigkeit	0/+	+	+
Sonderfälle	0	+	+
Lösungsdauer	–	0	+

Schwierigkeiten und Fehler

Die häufigsten systematischen Fehler:

$$\begin{array}{r} 2\ 7\ 3 \\ -\ 1\ 9\ 7 \\ \hline 1\ 2\ 4 \end{array}$$

Spaltenweise Unterschiedsbildung

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 4 \\ -\ 2\ 1\ 6 \\ \hline 3\ 6\ 8 \end{array}$$

Keine Berücksichtigung des Übertrags (generell)

$$\begin{array}{r} 7\ 8\ 6 \\ -\ \ \ 9\ 2 \\ \hline 7\ 9\ 4 \end{array}$$

Kein Übertrag in die leere Stelle (Sonderfall)

Schwierigkeiten und Fehler

Fehlergruppe	Anteil an der Fehlerzahl
Übertragungsfehler	50 %
Rechenrichtungsfehler	17 %
Perseverationsfehler	10 %
Fehler mit der Null	8 %
Einsundeinsfehler	8 %
Addition statt Subtraktion	5 %
Unterschiedliche Stellenanzahl	4 %

Einfluss ausgewählter Faktoren (Padberg)

Notation der Überträge	Richtig gelöste Aufgaben
immer	88 %
nie	81 %
manchmal	65 %

Behandlung nichtdezimaler Stellenwertsysteme	Anteil richtig gelöster Aufgaben	Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern
relativ ausführlich	93 %	3 %
nur kurz	81 %	15 %
überhaupt nicht	78 %	16 %

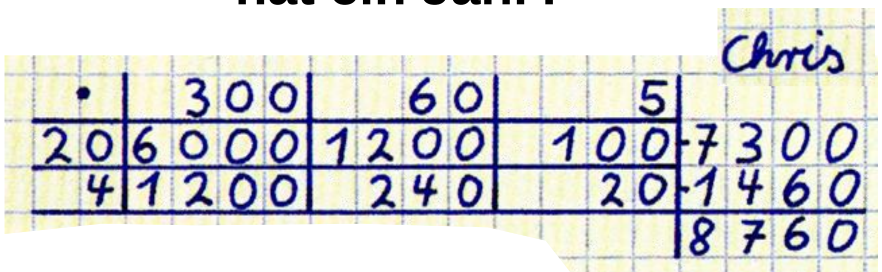
Konkretes Material: Systemblöcke

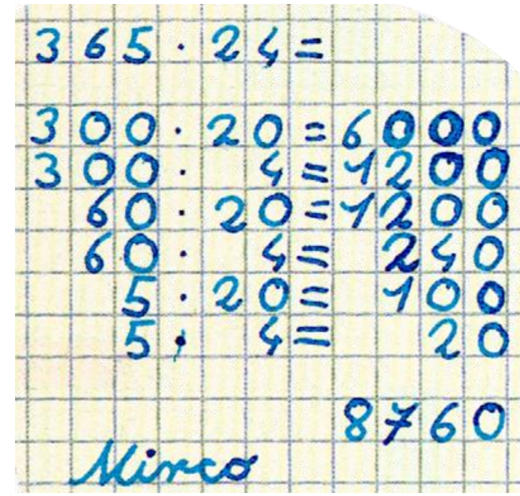
Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

5.4 Schriftliche Multiplikation

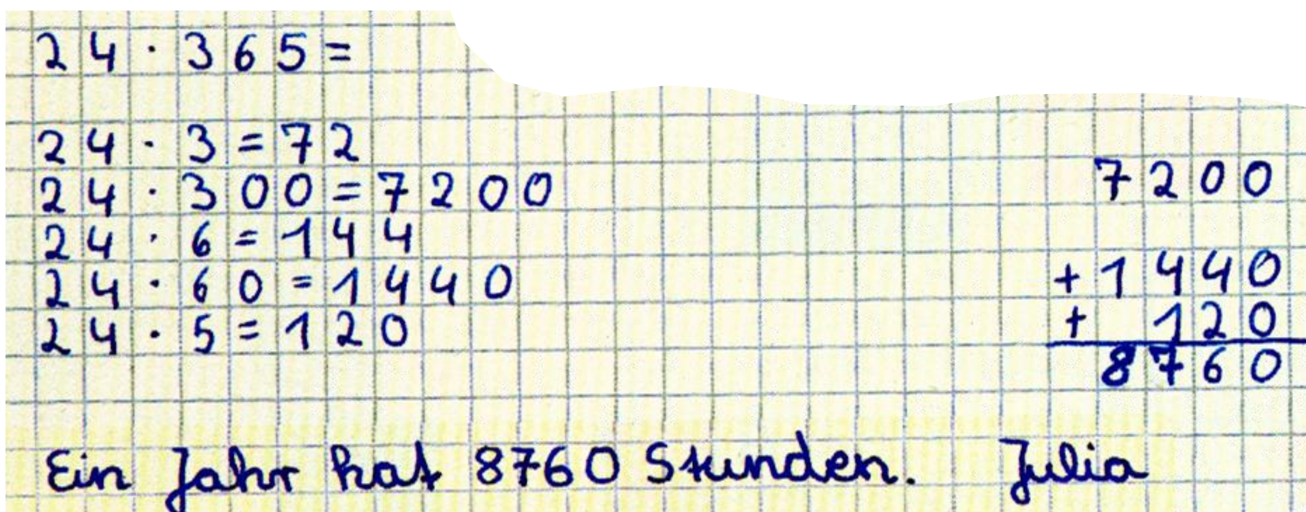
Rechenwege bei der Multiplikation

Wie viele Stunden hat ein Jahr?

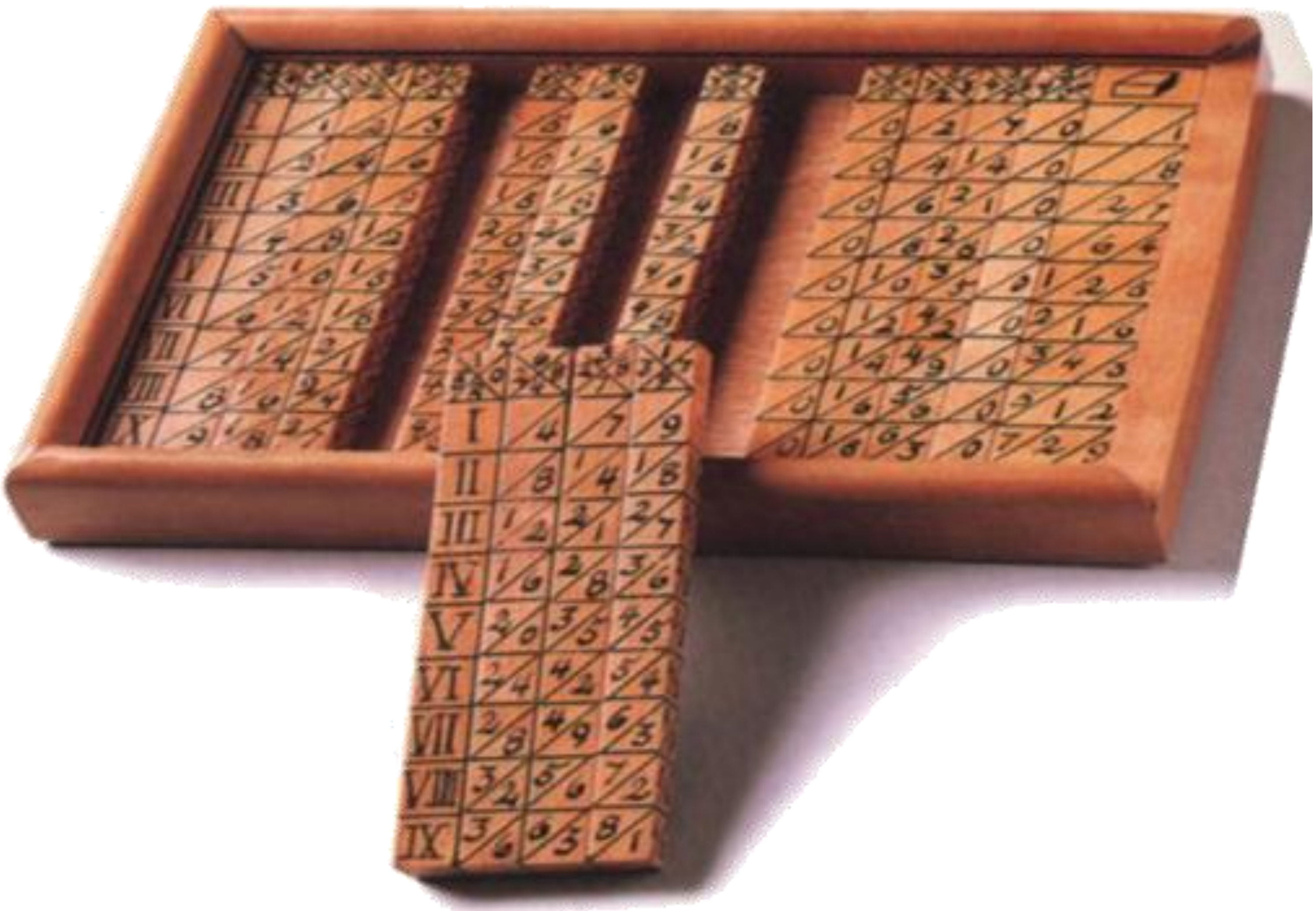




Wie rechnest du?



Rechenstäbe von John Neper

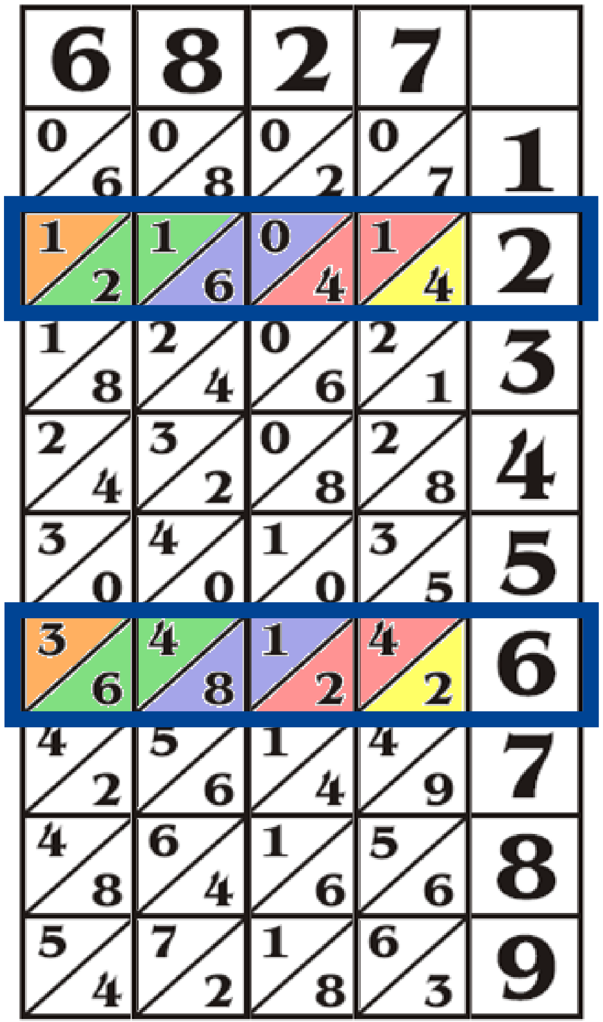


Rechenstäbe

Indexstab	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Indexstab — **Rechenstäbe**

Multiplizieren mit den Rechenstäben



$6827 \cdot 2$

$= 13654$

$6827 \cdot 6$

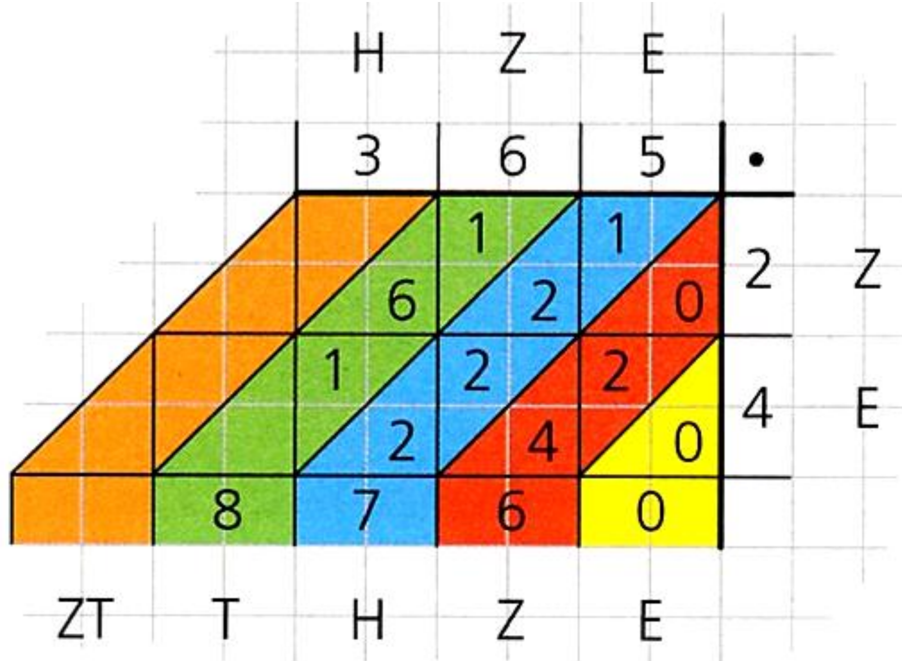
$= 40962$

Rechenstäbe von John Napier (Neper)

Entwicklung des Normalverfahrens

Wittmann / Müller: Das Zahlenbuch – Mathematik im 4. Schuljahr. Klett, Leipzig, 2003, S. 55

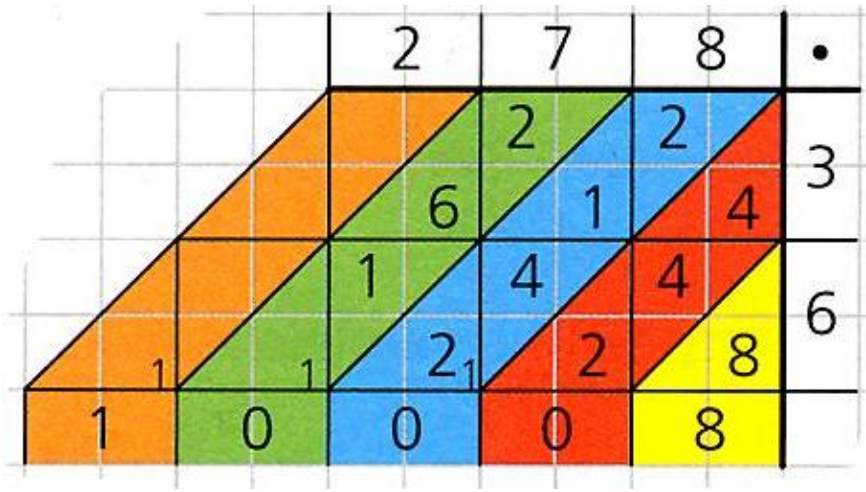
So haben die alten Rechenmeister die Aufgabe 365 · 24 gerechnet.



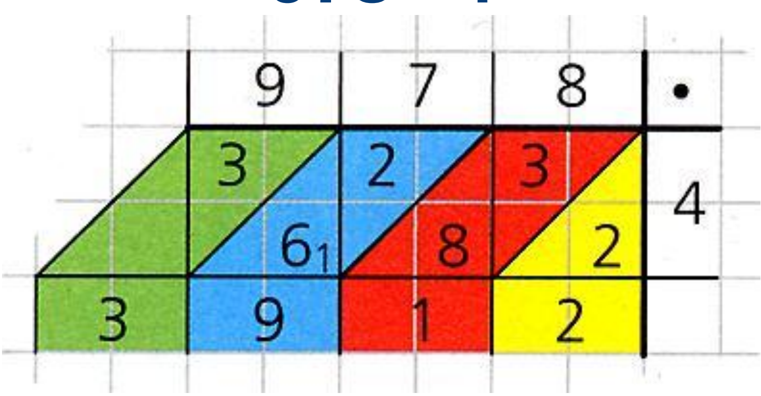
Zuerst wird ziffernweise multipliziert. Die Ergebnisse werden nach Ziffern getrennt in das Gitter geschrieben. Zum Schluss werden die Zahlen in den schrägen Streifen nach Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern addiert und ergeben die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender des Ergebnisses.

Entwicklung des Normalverfahrens

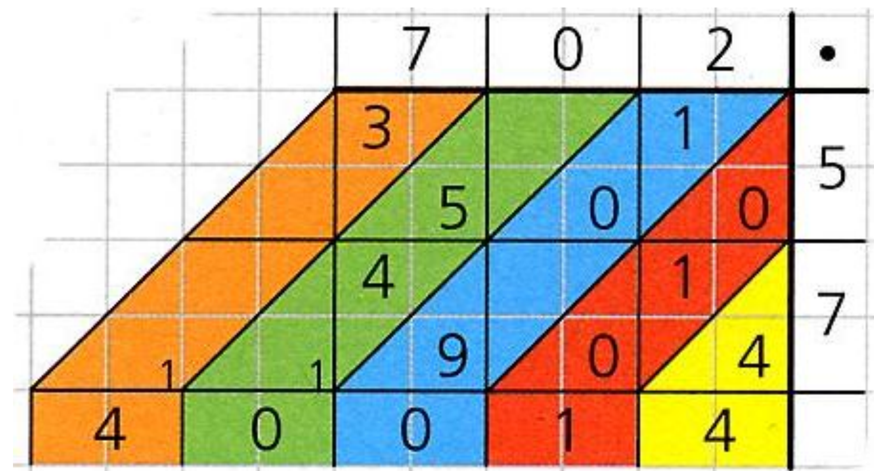
278 · 36



978 · 4

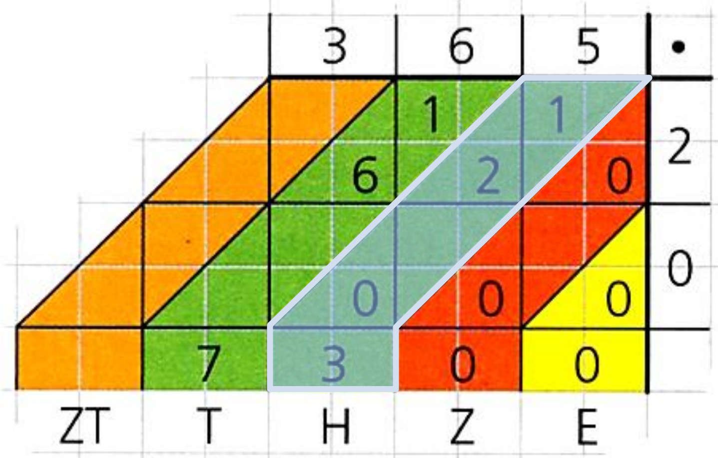


702 · 57



Entwicklung des Normalverfahrens

365 · 20 =




```
3 6 5 · 2 0
    7 3 0
+     0 0 0
---------
    7 3 0 0
```

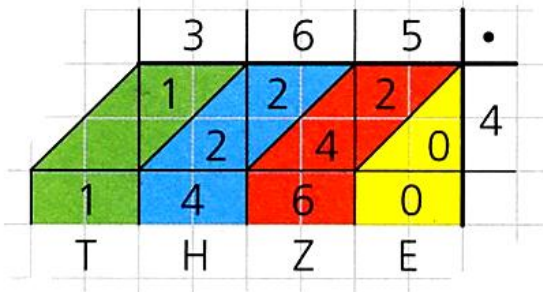
Oder noch kürzer:

```
3 6 5 · 2 0
---------
    7 3 0 0
```

Entwicklung des Normalverfahrens

Früher rechnete man so:

365 · 4 =



Heute rechnet man kürzer:

```
3 6 5 · 4
  1 4 6 0

  T H Z E
```

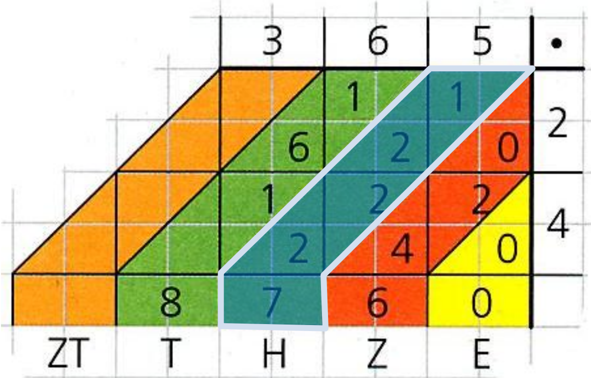
Sprich:

4 · 5 = 20, 0 an, 2 gemerkt.

4 · 6 = 24, 24 + 2 = 26, 6 an, 2 gemerkt.

4 · 3 = 12, 12 + 2 = 14, 14 an.

365 · 24 =




```
3 6 5 · 2 4
    7 3 0
+ 1 4 6 0
  8 7 6 0

  T H Z E
```

Sprich:

2 · 5 = 10, 0 an, 1 gemerkt.

2 · 6 = 12, 12 + 1 = 13, 3 an, 1 gemerkt.

2 · 3 = 6, 6 + 1 = 7, 7 an.

4 · 5 = 20, 0 an, 2 gemerkt.

4 · 6 = 24, 24 + 2 = 26, 6 an, 2 gemerkt.

4 · 3 = 12, 12 + 2 = 14, 14 an.

Entwicklung des Normalverfahrens 2

Treffers: Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren, 1983, Heft 1, S. 16-20

Treffers: Schrittweise Schematisierung

- In einem Adressbuch von 62 Seiten stehen auf jeder Seite 45 Namen. Wie viele Namen stehen im Buch?

$10 \cdot 45 = 450$
$10 \cdot 45 = 450$
$10 \cdot 45 = 450$
$10 \cdot 45 = 450$
$10 \cdot 45 = 450$
$10 \cdot 45 = 450$
2700
$1 \cdot 45 = 45$
$1 \cdot 45 = 45$
90
$60 \cdot 45 = 2700$
$2 \cdot 45 = 90$
$62 \cdot 45 = 2790$

45
10 450
10 450
10 450
10 450
10 450
10 450
2700
2· 90
2790

450
450
450
450
450
450
90
2790

$60 \cdot 40 = 2400$
$60 \cdot 5 = 300$
$2 \cdot 45 = 90$
2790

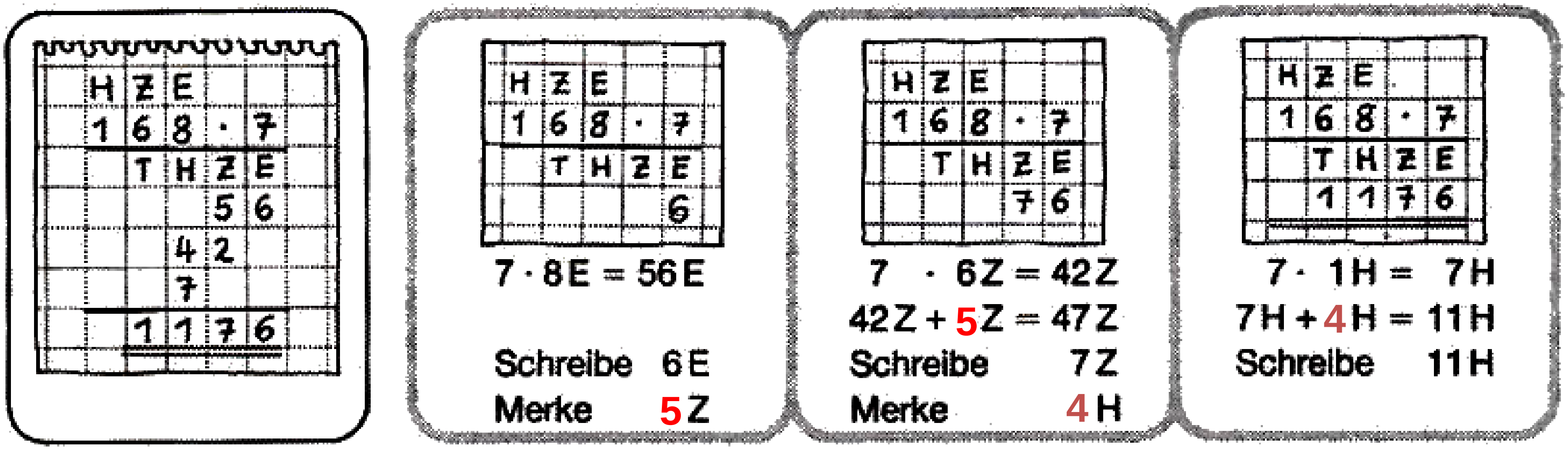
$60 \cdot 45 = 2700$
$2 \cdot 45 = 90$
2790

$62 \cdot 45$
2700
90
2790

Entwicklung des Normalverfahrens 3

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

1. Multiplikation mit einstelligem Multiplikator



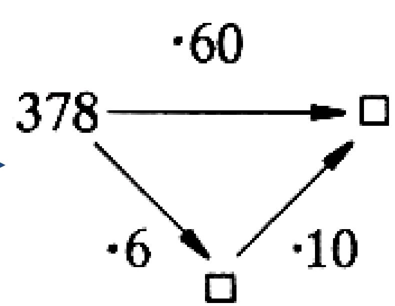
Entwicklung des Normalverfahrens 3

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

2. Multiplikation mit einem Vielfachen von 10

$357 \cdot 10$

T	H	Z	E	
	3	5	7	$\cdot 10$
3	5	7	0	



Rechenweg 1

$\underline{378 \cdot 6}$
2268

$\underline{2268 \cdot 10}$
22680

Rechenweg 2

$\underline{378 \cdot 60}$
22680

Entwicklung des Normalverfahrens 3

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

3. Multiplikation mit gemischten zwei- und mehrstelligen Multiplikatoren

$$\begin{aligned} 347 \cdot 253 &= 347 \cdot (200 + 50 + 3) \\ &= 347 \cdot 200 + 347 \cdot 50 + 347 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 347 \cdot 253 = \\ \hline 347 \cdot 200 = 69400 \\ 347 \cdot 50 = 17350 \\ 347 \cdot 3 = 1041 \\ \hline 347 \cdot 253 = 87791 \end{array}$$

oder

$347 \cdot 253 =$

$\underline{347 \cdot 200}$	$\underline{347 \cdot 50}$	$\underline{347 \cdot 3}$	69400
69400	17350	1041	+ 17350
			$\underline{+ \ 1041}$
			87791

	$\underline{347 \cdot 253}$
das 200-fache	69400
das 50-fache	17350
das 3-fache	$\underline{1041}$
	87791

Entwicklung des Normalverfahrens 3

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

3. Multiplikation mit gemischten zwei- und mehrstelligen Multiplikatoren

$$\begin{array}{r} 347 \cdot 253 \\ \hline 69400 \\ 17350 \\ 1041 \\ \hline 87791 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 347 \cdot 253 \\ \hline 694 \\ 1735 \\ 1041 \\ \hline 87791 \end{array}$$

Nicht zu schnell!

Normierte Endform

Überschlagsrechnung und Schätzen

- **Rundung der Faktoren auf die führende Ziffer**
  - Maßnahmen:
    - Vorgabe eines festen Platzes für die Überschlagsrechnung.
    - Aufgaben, bei denen die Überschlagsrechnung erforderlich ist bzw. klare Vorteile bietet.

1. Vier Ergebnisse müssen falsch sein. Das kannst du durch Überschlagen herausfinden. Gib die richtigen Ergebnisse an.

$4350 \cdot 6 = 16100$	$4350 \cdot 6 = 26100$
$2548 \cdot 9 = 32932$	$9017 \cdot 4 = 30668$
$6541 \cdot 7 = 54787$	$4880 \cdot 5 = 24400$

2. Welches Ergebnis liegt zwischen 40000 und 50000? Überschlage, dann rechne genau.

$6594 \cdot 7$	$4892 \cdot 9$	
$1997 \cdot 19$	$2573 \cdot 23$	$807 \cdot 58$
$695 \cdot 69$	$563 \cdot 92$	

3. Stelle dir selbst Aufgaben zusammen. Das Ergebnis soll zwischen 20000 und 40000 liegen. Wieviel Aufgaben findest du? Der Überschlag kann dir helfen.

$\boxed{2153}$ $\cdot 13$ $\boxed{297}$ $\boxed{3020}$ $\boxed{999}$ $\cdot 98$

$\cdot 89$ $\boxed{578}$ $\cdot 42$ $\cdot 25$ $\boxed{2509}$

$\boxed{1209}$ $\boxed{302}$

Festigung des Multiplikationskalküls

Tintenklecksaufgaben

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4\,\square \cdot 7 \\ \hline 1\,6\,4\,2\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\,\square\,2\,\square \cdot 4 \\ \hline 1\,7\,3\,1\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,\square\,\square\,7 \cdot 4 \\ \hline \square\,4\,2\,\square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square\,1\,\square\,\square \cdot 6 \\ \hline 2\,\square\,\square\,9\,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square\,\square \cdot \square \\ \hline 1\,3\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\,7 \cdot \square\,\square \\ \hline \square\,\square\,6 \\ \square\,\square\,3 \\ \hline \square\,\square\,\square\,\square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,7 \cdot 8\,\square\,\square \\ \hline 3\,4\,1\,\square \\ 4\,\square\,\square \\ \square\,\square\,\square\,1 \\ \hline \square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square \end{array}$$

Multiplikationsverfahren im Ausland

- **USA, England, Türkei, Griechenland, Spanien, Portugal, (Italien):**

$$\begin{array}{r} 753 \\ \times\ 495 \\ \hline 3765 \\ 6777 \\ 3012 \\ \hline 372735 \end{array}$$

- **Ehemaliges Jugoslawien:**

$$\begin{array}{l} 753 \cdot 495 \\ \hline 3012 \\ 6777 \\ 3765 \\ \hline 372735 \end{array}$$

Problembereich: Nullen

- **Zwischennullen im Multiplikator**
  - Stellenrichtige Notation
- **Endnullen im Multiplikator**
  - Stellenrichtige Notation
- **Zwischen- und Endnullen im Multiplikand**
  - Stellenrichtige Notation
- **Endnullen infolge der Rechnung**
  - z.B. $8 \cdot 5$ als Teilprodukt ⇨ Endnull
    ⇨ „Endnullen weglassen“
    ⇨ Fehler bei der Stellenanordnung
- **$0 \cdot a = a$ und $a \cdot 0 = a$**

$$
\begin{array}{r}
374 \cdot 208 \\
\hline
74800 \\
2992 \\
\hline
77792
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
374 \cdot 208 \\
\hline
748 \\
000 \\
2992 \\
\hline
77792
\end{array}
$$

Die häufigsten systematischen Fehler

Fehlerbeschreibung	Beispiel	Anteil der Schüler mit dem jeweiligen Fehler
Stellenwertbelegende Rolle der Null im 2. Faktor nicht beachtet	531 · 30 1593	5 %
Stellenwertfehler durch falsche Anordnung der Teilprodukte	712 · 23 1424 2136	5 %
Einmaleinsfehler mit der Null im 2. Faktor	531 · 30 1593 531	3 %
Einmaleinsfehler mit der Null im 1. Faktor	620 · 41 2484	1 %
Behalteziffern als zusätzliche Stelle im (Teil-)Produkt notiert	282 · 33 6246	1 %

Häufigste Fehler und mögliche Ursachen

Fehlerbeschreibung	mögliche Fehlerursachen
Stellenwertfehler durch falsche Anordnung der Teilprodukte, z.B. Ausrücken nicht beachtet	Anwendung einer falschen bzw. keiner Regel für die Anordnung der Teilprodukte; Bedeutung des Ausrückens wurde nicht erfaßt bzw. vergessen, Anhängenullen wurden möglicherweise zu früh weggelassen.
Stellenwertbelegende Rolle der Null im 2. Faktor nicht beachtet	Methodische Stufe „Multiplikation mit Vielfachen von 10" nicht ausführlich genug behandelt; Nullanhängungsregel zu formal ohne Einsicht der Schüler eingeführt; Vielfache von 10 werden nicht als Ganzes aufgefaßt, sondern zerlegt (z.B. 40 in 4 und 0); zu wenig Übung und damit keine Regel für das Rechnen mit Nullen; zu früh auf das Notieren der Endnullen verzichtet.

Häufigste Fehler und mögliche Ursachen

Einmaleinsfehler mit der Null im – zweiten Faktor – ersten Faktor	Falsche Vorstellung, daß bei Multiplikationsaufgaben das Resultat größer als die Einzelfaktoren bzw. so groß wie der größere Faktor sein muß; Aufgaben mit Nullen beim Erarbeiten des Einmaleins zu wenig berücksichtigt; keine Unterscheidung zwischen der Rolle der Null bei der Addition und Multiplikation.
Einmaleinsfehler der Nähe (Beispiel: $8 \cdot 3 = 21$)	Zu starke Betonung des Aufsagens von Einmaleinsreihen, so daß sich die Schüler beim Abrufen des zu einem gegebenen Multiplikators gehörigen Produktes aus der auswendig gelernten Einmaleinsreihe leicht um ein Element vertun; Probleme beim ordinalen Zählen; Probleme durch das Zurückführen von Aufgaben auf sogenannte Königs- bzw. Stützaufgaben.

Häufigste Fehler und mögliche Ursachen

Einerstelle des vorangehenden Teilprodukts als Behalteziffer addiert (Beispiel: $\frac{126 \cdot 6}{\underline{11}56}$)	Produktziffer wirkt nach und setzt sich gegenüber der Behalteziffer durch (Perseverationsfehler); Verstärkung dieser Tendenz durch die Betonung der Produktziffer beim begleitenden Sprechen

Maßnahmen gegen Fehler

- **Multiplikation mit Vielfachen von zehn gründlich thematisieren.**
  - Nicht nur „Anhängen von Nullen“!
- **Behalteziffern zumindest in der Anfangsphase notieren lassen.**
- **Endnullen länger, evtl. sogar auf Dauer notieren lassen.**
- **Immer auch Aufgaben mit Nullen stellen.**

Schöne Aufgaben 1

1.	2.	3.
$37037 \cdot 3 =$ ______	$77 \cdot 13 =$ ______	$271 \cdot 41 =$ ______
$37037 \cdot 6 =$ ______	$77 \cdot 26 =$ ______	$271 \cdot 82 =$ ______
$37037 \cdot 9 =$ ______	$77 \cdot 39 =$ ______	$271 \cdot 123 =$ ______
$37037 \cdot 12 =$ ______	$77 \cdot 52 =$ ______	$271 \cdot 164 =$ ______
$37037 \cdot 15 =$ ______	$77 \cdot 65 =$ ______	$271 \cdot 205 =$ ______
$37037 \cdot 18 =$ ______	$77 \cdot 78 =$ ______	$271 \cdot 246 =$ ______
$37037 \cdot 21 =$ ______	$77 \cdot 91 =$ ______	$271 \cdot 287 =$ ______
$37037 \cdot 24 =$ ______	$77 \cdot 104 =$ ______	$271 \cdot 328 =$ ______
$37037 \cdot 27 =$ ______	$77 \cdot 117 =$ ______	$271 \cdot 369 =$ ______
$37037 \cdot 30 =$ ______	$77 \cdot 130 =$ ______	$271 \cdot 410 =$ ______

Schöne Aufgaben 1

Wittmann / Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, S. 149ff

4.

$9 \cdot 9 =$	81
$98 \cdot 9 =$	882
$987 \cdot 9 =$	
$9876 \cdot 9 =$	
$98765 \cdot 9 =$	
$987654 \cdot 9 =$	
$9876543 \cdot 9 =$	
$98765432 \cdot 9 =$	
$987654321 \cdot 9 =$	

5.

$1 \cdot 8 + 1 =$	9
$12 \cdot 8 + 2 =$	98
$123 \cdot 8 + 3 =$	
$1234 \cdot 8 + 4 =$	
$12345 \cdot 8 + 5 =$	
$123456 \cdot 8 + 6 =$	
$1234567 \cdot 8 + 7 =$	
$12345678 \cdot 8 + 8 =$	
$123456789 \cdot 8 + 9 =$	

Schöne Aufgaben 1

Wittmann / Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, S. 149ff

6.

$0 \cdot 9 + 1 =$ 1

$1 \cdot 9 + 2 =$ 11

$12 \cdot 9 + 3 =$ 111

$123 \cdot 9 + 4 =$ ______

$1234 \cdot 9 + 5 =$ ______

$12345 \cdot 9 + 6 =$ ______

$123456 \cdot 9 + 7 =$ ______

$1234567 \cdot 9 + 8 =$ ______

$12345678 \cdot 9 + 9 =$ ______

$123456789 \cdot 9 + 10 =$ ______

7.

$123456789 \cdot 9 =$ ______

$123456789 \cdot 18 =$ ______

$123456789 \cdot 27 =$ ______

$123456789 \cdot 36 =$ ______

$123456789 \cdot 45 =$ ______

$123456789 \cdot 54 =$ ______

$123456789 \cdot 63 =$ ______

$123456789 \cdot 72 =$ ______

$123456789 \cdot 81 =$ ______

$123456789 \cdot 90 =$ ______

Schöne Aufgaben 2

Wittmann / Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, S. 149ff

1.	2.	3.
11 · 2730 = ...	33 · 900 = ...	110 · 273 = ...
22 · 1350 = ...	55 · 546 = ...	330 · 90 = ...
11 · 2700 = ...	66 · 455 = ...	165 · 182 = ...
33 · 910 = ...	66 · 450 = ...	330 · 91 = ...
22 · 1365 = ...	55 · 540 = ...	110 · 270 = ...

4.	5.	6.
10 · 3003 = ...	10 · 2970 = ...	6 · 4950 = ...
5 · 5940 = ...	5 · 6006 = ...	2 · 15015 = ...
30 · 1001 = ...	30 · 990 = ...	4 · 7425 = ...
3 · 9900 = ...	6 · 5005 = ...	20 · 1485 = ...
3 · 10010 = ...	50 · 594 = ...	2 · 14850 = ...

Bei welchen Aufgaben siehst du sofort, daß sie gleiche Ergebnisse haben?

Schöne Aufgaben 2

Wittmann / Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, S. 149ff

7.

165 · 180 = ...
210 · 143 = ...
100 · 297 = ...
105 · 286 = ...
300 · 99 = ...

8.

21 · 1430 = ...
7 · 4290 = ...
150 · 198 = ...
42 · 715 = ...
75 · 396 = ...

9.

14 · 2145 = ...
15 · 1980 = ...
70 · 429 = ...
15 · 2002 = ...
35 · 858 = ...

10.

77 · 390 = ...
60 · 495 = ...
231 · 130 = ...
45 · 660 = ...
154 · 195 = ...

11.

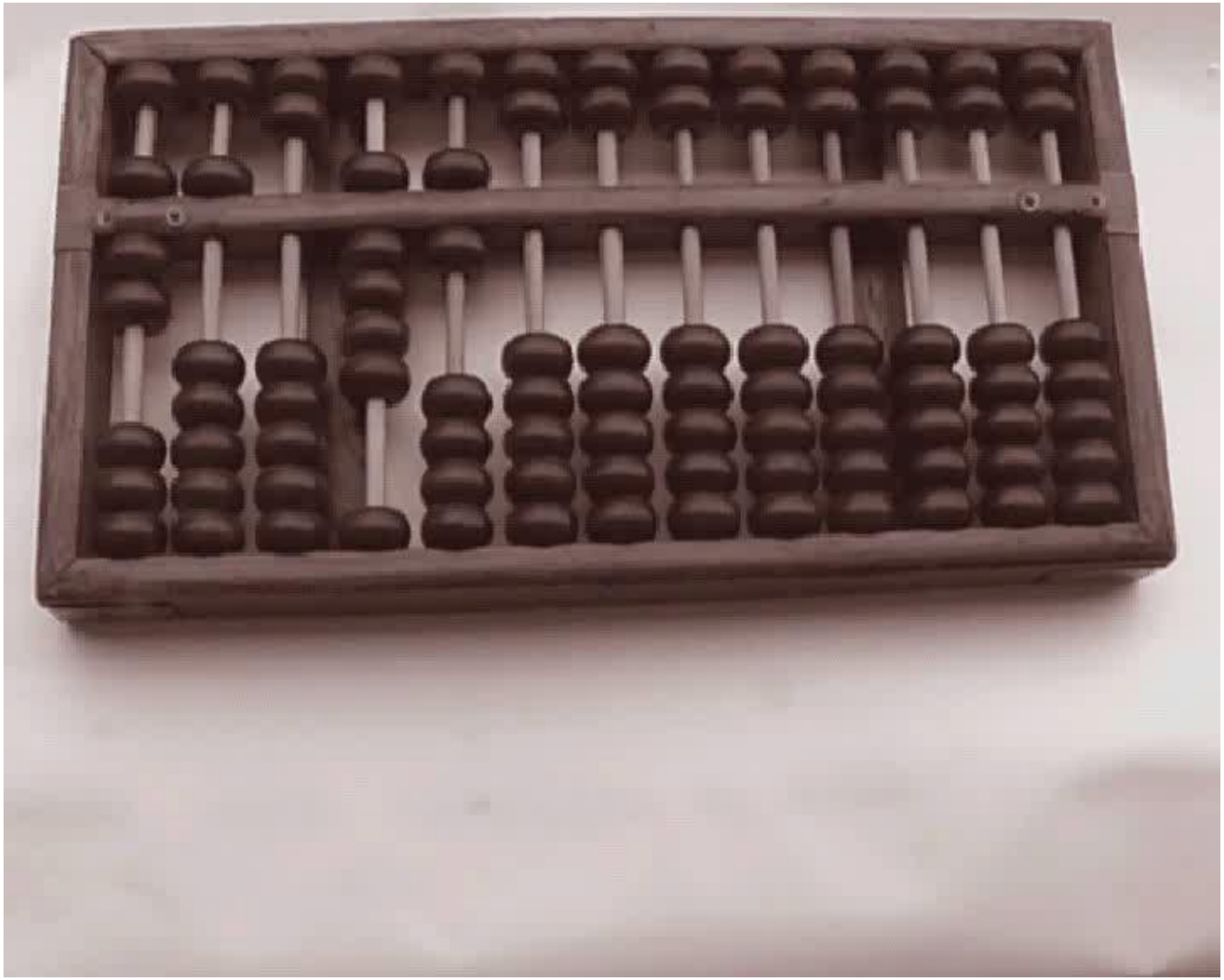
2310 · 13 = ...
770 · 39 = ...
27 · 1100 = ...
1155 · 26 = ...
385 · 78 = ...

12.

462 · 65 = ...
9 · 3300 = ...
12 · 2475 = ...
165 · 180 = ...
18 · 1650 = ...

Bei welchen Aufgaben siehst du sofort, daß sie gleiche Ergebnisse haben?

Multiplikation mit dem Abakus



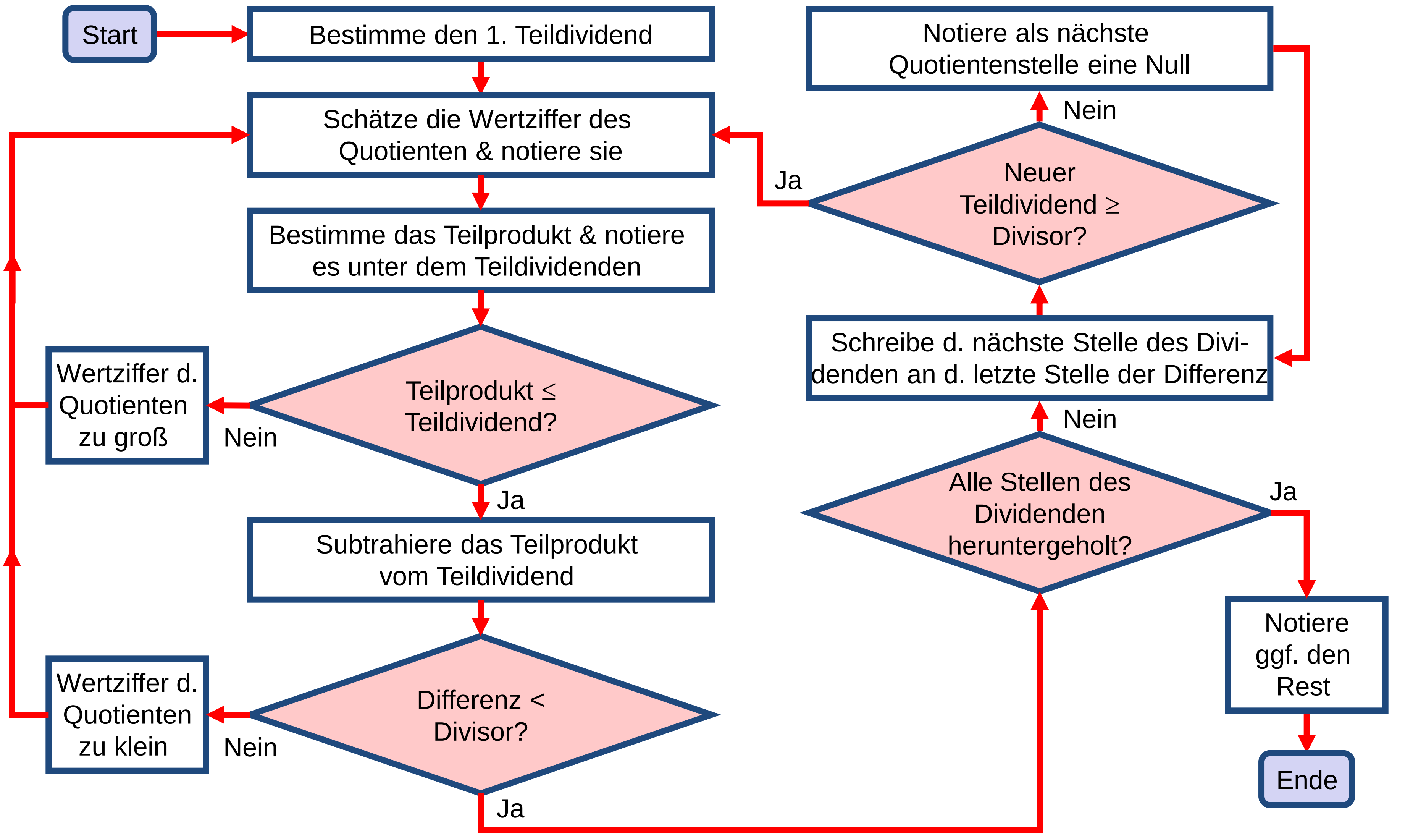
Kapitel 5: Schriftliche Rechenverfahren

5.5 Schriftliche Division

Schriftliches Normalverfahren

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & 5 & 7 & 6 & : 7 = 368 \\
\underline{2} & \underline{1} & & & \\
 & 4 & 7 & & \\
 & \underline{4} & \underline{2} & & \\
 & & 5 & 6 & \\
 & & \underline{5} & \underline{6} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Komplexität des Divisionsalgorithmus



Komplexität des Divisionsalgorithmus

- **Immer wieder notwendige Teilschritte:**
  - Bestimmen des (Teil-)Dividenden
  - überschlagsmäßiges Dividieren
  - schriftliches Multiplizieren
  - schriftliches Subtrahieren

⇧ Häufigste Fehlerquelle

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & 5 & 7 & 6 & : 7 = 368 \\
2 & 1 & & & \\
\hline
 & 4 & 7 & & \\
 & 4 & 2 & & \\
\hline
 & & 5 & 6 & \\
 & & 5 & 6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

- **Die schriftliche Division durch mehrstellige Divisoren kann nicht vollständig auf die Anwendung des kleinen 1:1 bzw. des kleinen 1x1 reduziert werden, da nur der Dividend, nicht aber der Divisor zerlegt wird!**
  - Tendenz in neuen Grundschulrichtlinien:
    Auf die Division mit größeren Divisoren wird ganz verzichtet.
  - Bayern: Divisor bis 20 (alle); leistungsstärkere Kinder: zweistellige (>20) und dreistellige Divisoren

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

- **Die halbschriftliche Division:**
  - Auch bei mehrstelligen Divisoren durchführbar.
  - Die Zahlen werden als Ganzes zerlegt.
    ⇨ Keine optimalen Abspaltungen nötig.
  - Man kommt mit relativ leicht zu berechnenden Schätzprodukten aus: mal 2, mal 5, mal 10, mal 20, mal 50, mal 100, mal 200, usw.
  - Bereits der erste Schritt ermöglicht eine gute Abschätzung der Größenordnung, da er eine Zahl und keine Ziffer liefert.

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

	49 806 : 9 =	5 534
	49 806	
	45 000 : 9 =	5 000
Rest	4 806	
	4 500 : 9 =	500
Rest	306	
	180 : 9 =	20
Rest	126	
	90 : 9 =	10
Rest	36 : 9 =	4

49 806 : 9 = 5 534
45
48
45
30
27
36

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

	94 981 : 37 = 2 567 Rest 2	
	94 981	
	74 000 : 37 =	2 000
Rest	20 981	
	18 500 : 37 =	500
Rest	2 481	
	1 850 : 37 =	50
Rest	631	
	370 : 37 =	10
Rest	261	
	185 : 37 =	5
Rest	76	
	74 : 37 =	2
	2	

94 981 : 37 = 2 567 Rest 2
74
209
185
248
222
261
259
2

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

Die schriftliche Division:

- Zum Erzeugen von Verständnis unmittelbar auf die halbschriftliche Division zurückgreifen.

Unterschiede:

- Es wird mit Stellenwerten gearbeitet.
- Die schrittweise Aufspaltungen des Dividenden muss optimal gewählt werden, so dass pro Schritt eine Ziffer des Quotienten entsteht.

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

ZT	T	H	Z	E
4	9	8	0	6
4	5			
	4	8		
	4	5		
		3	0	
		2	7	
			3	6
			3	6
				0

: 9 =

T	H	Z	E
5	5	3	4

Kommentar:

- 4 ZT lassen als ganze ZT keine Teilung durch 9 zu. Daher verwandelt man sie in T und hat dann insgesamt 49 T.
- Von den 49T kann man 45T durch 9 teilen (5 T, Probe: 5 T · 9 = 45T).
- Es bleibt ein Rest von 4 T der zusammen mit den 8 H, die „heruntergeholt" werden, 48 H ergibt.
- Von den 48 H lassen sich 45 H durch 9 teilen (5 H, Probe: 5 H · 9 = 45 H).
- Der Rest, nämlich 3 H, ergibt 30 Z, die sich aufteilen lassen (3 Z, Probe: 3 Z · 9 = 27 Z).
- Der Rest, nämlich 3 Z, wird in Einer verwandelt. Zusammen mit den vorhandenen 6 E erhält man 36 E, die man durch 9 teilen kann, 36:9 = 4.

Entwicklung des Normalverfahrens 1

Wittmann, Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Klett, 1992,S. 151 – 153

Beispiel:
Durch Löschung von ZT geht

ZT	T	H	Z	E
4	9	8	0	6

in

●	T	H	Z	E
4	9	8	0	6

über,

womit 49 T erzeugt werden.

Die Löschung von T führt

●	T	H	Z	E
4	9	8	0	6
4	5			
	4			

in

●	●	H	Z	E
4	9	8	0	6
4	5			
	4	8		

über,

wodurch 498 H erkennbar werden usw. Das Streichen der Stellenbezeichnungen deutet auch an, daß die entsprechenden Stellenwerte verteilt worden sind.
Die Stellentafeln sollten als Stützen solange verwendet werden, bis die Schüler das Verfahren beherrschen.

Entwicklung des Normalverfahrens 2

Treffers: Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren, 1983, Heft 1, S. 16-20

Treffers: Schrittweise Schematisierung

- Sachsituationen dienen als Ausgangspunkt für die Algorithmen (Motivation, Orientierungsgrundlage für Erlernen & Ausführen, leichtere Anwendung).
- Informellen Methoden, die Schüler bei der Lösung von Sachproblemen benutzen, werden bewusst berücksichtigt & diskutiert. Die Algorithmen entwickeln die Schüler Schritt für Schritt.
- Von Anfang an werden Sachprobleme mit relativ großen Zahlen eingesetzt, die die Schüler auf sehr verschiedene Arten lösen.
- Im Verlauf des Unterrichts werden die Operationen und ihre Notation zunehmend stärker schematisiert und abgekürzt.
- Die Endform des Algorithmus kann je nach Schüler unter-schiedlich sein. Die standardisierte, sehr knappe Endform muss bei der Multiplikation und Division nicht erreicht werden.

Entwicklung des Normalverfahrens 2

Treffers: Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren, 1983, Heft 1, S. 16-20

Treffers: Schrittweise Schematisierung

- Verteile 324 Briefmarken ehrlich unter vier Kinder; wie viele bekommt jedes einzelne?
- **Phase 1:** Die Verteilung wird konkret ausgeführt, erst stückweise, aber dann schnell mit größeren gleichen Portionen.
- **Phase 2:** Die Verteilung geschieht im Kopf und wird so notiert, dass man ablesen kann, wie viel verteilt und wie viel noch zu verteilen ist.

	Rita	Gerd	Rosi	Hans
324				
40	10	10	10	10
284				
40	10	10	10	10
244				
40	10	....	....	....

Entwicklung des Normalverfahrens 2

Treffers: Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren, 1983, Heft 1, S. 16-20

Treffers: Schrittweise Schematisierung

- Verteile 324 Briefmarken ehrlich unter vier Kinder. Wie viele bekommt jedes einzelne?
- **Phase 3:** Die Griffe werden umfangreicher und die Schreibweise wird weiter schematisiert & verkürzt.

	Rita	Gerd	Rosi	Hans
324				
200	50	50	50	50
124				
120	30	30	30	30
4				
4	1	....	....	....
0	81			

- **Phase 4:** Der größtmögliche Griff von Zehnern und Einern wird je Runde verteilt, oder er wird wenigstens angestrebt. Die Schreibweise ähnelt schon mehr der Standardmethode.

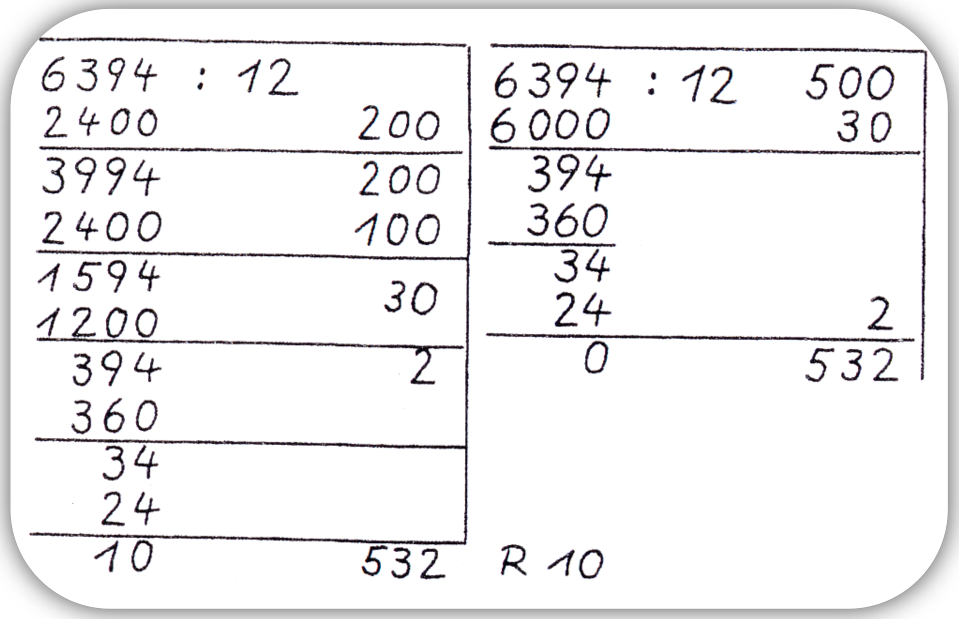
324	: 4	80
320		
4		1
4		
0		81

Entwicklung des Normalverfahrens 2

Treffers: Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren, 1983, Heft 1, S. 16-20

Treffers: Schrittweise Schematisierung

- Verteile 324 Briefmarken ehrlich unter vier Kinder; wie viele bekommt jedes einzelne?
- Nach ca. 10-15 Stunden arbeiten die Schülerinnen und Schüler etwa auf diesem Niveau.



- Die weitere Verkürzung des Verfahrens muss nicht für alle Schülerinnen und Schüler zum Standardalgorithmus führen.

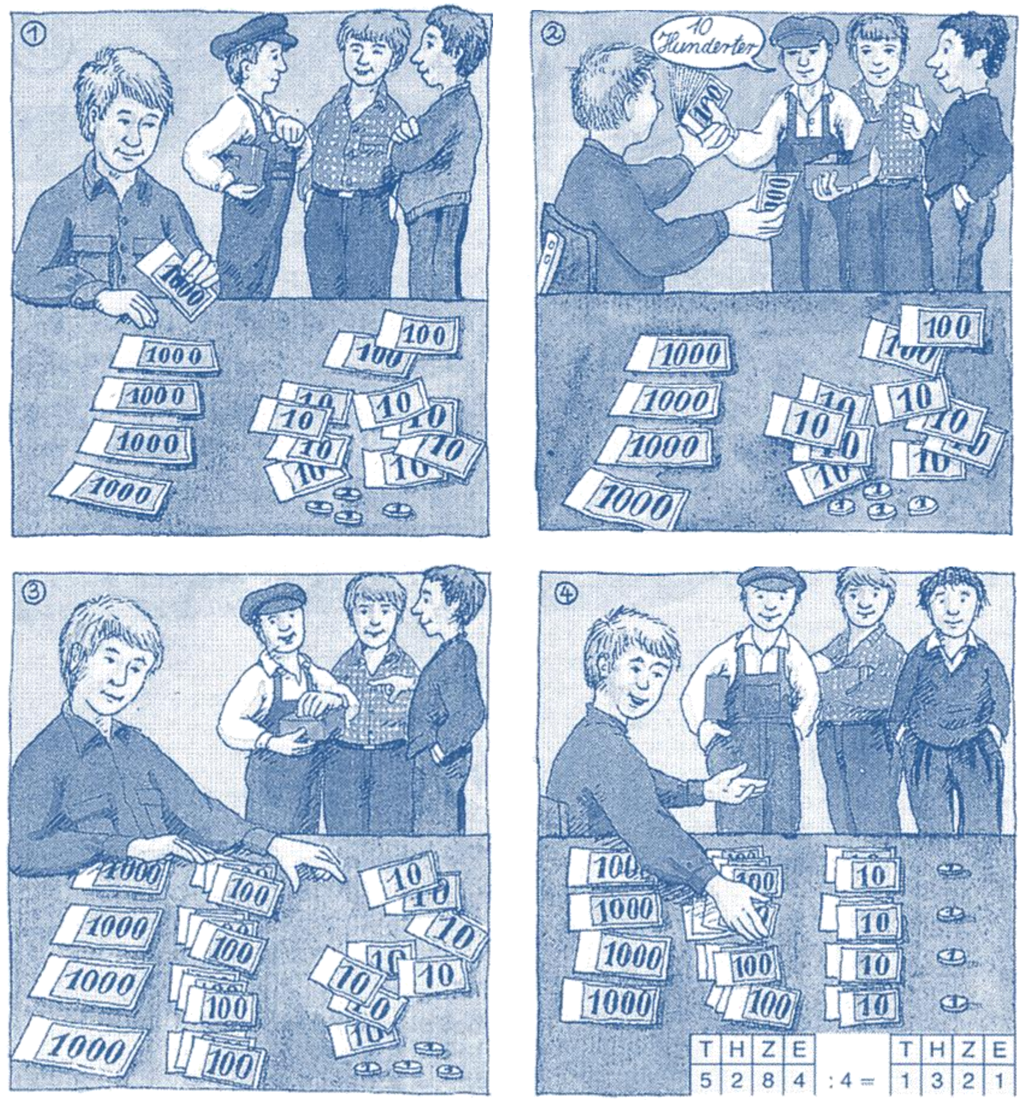
Entwicklung des Normalverfahrens 3

- **Padberg schlägt einen Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:**
  - Division durch einen einstelligen Divisor
    - Konkretes Anknüpfen an die Deutung der Division als Verteilen.
  - Division durch ein Vielfaches von 10
    - („reine Zehnerzahl“)
  - Division durch gemischter Zehnerzahlen

Entwicklung des Normalverfahrens 3

1. Division durch einen einstelligen Divisor

Konkretes Anknüpfen an die Deutung der Division als Verteilen.

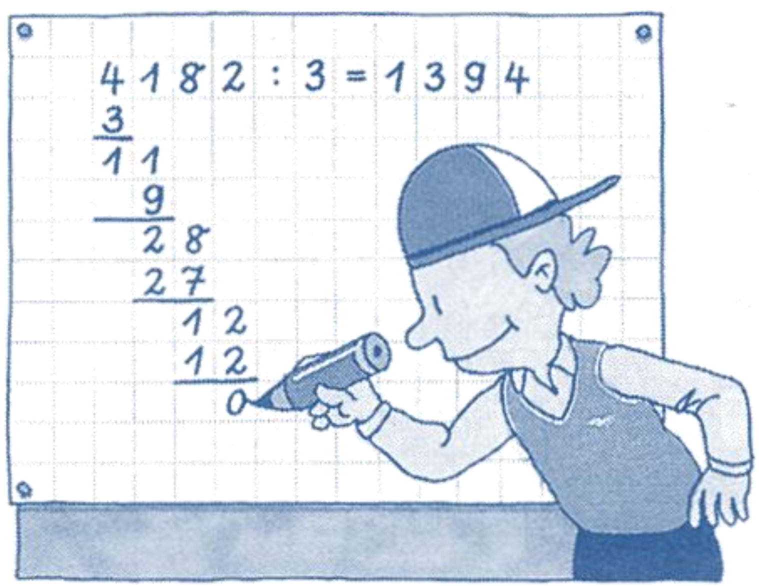


Beispiel:

Vier Arbeitskollegen haben im Lotto 5284 € gewonnen.
Sie teilen den Gewinn gleichmäßig untereinander.

Entwicklung des Normalverfahrens 3

So rechnet Mathemax:



4 182 : 3 = 1 394
3
11
9
28
27
12
12
0

Sprich so:

4 : 3 ist 1, 1 bleibt übrig
11 : 3 ist 3, 2 bleiben übrig
28 : 3 ist 9, 1 bleibt übrig
12 : 3 ist 4, nichts bleibt übrig

Entwicklung des Normalverfahrens 3

T	H	Z	E
2	9	8	5
2	5		
	4	8	
	4	5	
		3	5
		3	5
		0	0

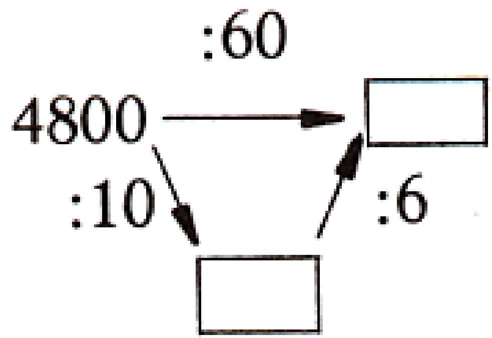
: 5 =

T	H	Z	E
•	5	9	7

- Die Sprechweise 2T:5 verdeutlicht, dass im Quotient die Tausenderstelle unbesetzt bleibt.
- Dies kann z. B. durch einen Punkt oder Strich kenntlich gemacht werden.
- Bereits hier folgende Aufgabentypen einbeziehen:
  - Nullen im Dividenden oder Quotienten
  - von Null verschiedener Rest

Entwicklung des Normalverfahrens 3

2. Division durch ein Vielfaches von 10 („reine Zehnerzahl“)



T	H	Z	E
7	2	4	0
4	0		
3	2	4	
3	2	0	
		4	0
		4	0
		0	0

: 40 =

T	H	Z	E
·	1	8	1

Normierte Endform durch „Weglassen“ der Stellenwerttafel.

Entwicklung des Normalverfahrens 3

3. Division durch gemischte Zehnerzahlen

- Große Schwierigkeiten beim Überschlag.
- Stufung:
    - zehnernaher Divisor (z. B. 51, 52 oder 58, 59)
    - zehnerferner Divisor (z. B. 45, 46)
- Notationsform, für den Fall, dass eine zu kleine oder zu große Quotientenziffer geschätzt wurde.

$9864 : 36 = 2\cancel{8}74$

72
266
~~288~~
252
144
144
0

$9864 : 36 = 2\cancel{6}74$

72
266
~~216~~
~~50~~
252
144
144
0