Fachdidaktische Grundlagen

Modul 1.3

Jürgen Roth

15.06.2025 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Fachdidaktische Grundlagen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1. Was ist / soll Mathematikdidaktik?
2. Rahmenbedingungen des MU
3. Differenzieren
4. Warum / wozu Mathematikunterricht?
5. Lernziele im Mathematikunterricht
6. Wie funktioniert Lernen?
7. **Didaktische Prinzipien**
8. Begriffe erarbeiten
9. Sachverhalte erarbeiten
10. Algorithmen erarbeiten
11. Anwenden und Modellieren
12. Problemlösen
13. Unterrichtsplanung
14. Computereinsatz am Beispiel DMS

juergen-roth.de/lehre/fachdidaktische-grundlagen

RPTU

7

Fachdidaktische Grundlagen

Didaktische Prinzipien

Didaktische Prinzipien (unvollständige Liste)

Prinzipien

- Genetisches Prinzip
- Sokratisches Prinzip
- Exemplarisches Prinzip
- Operatives Prinzip
- Integrationsprinzip

Prinzip des

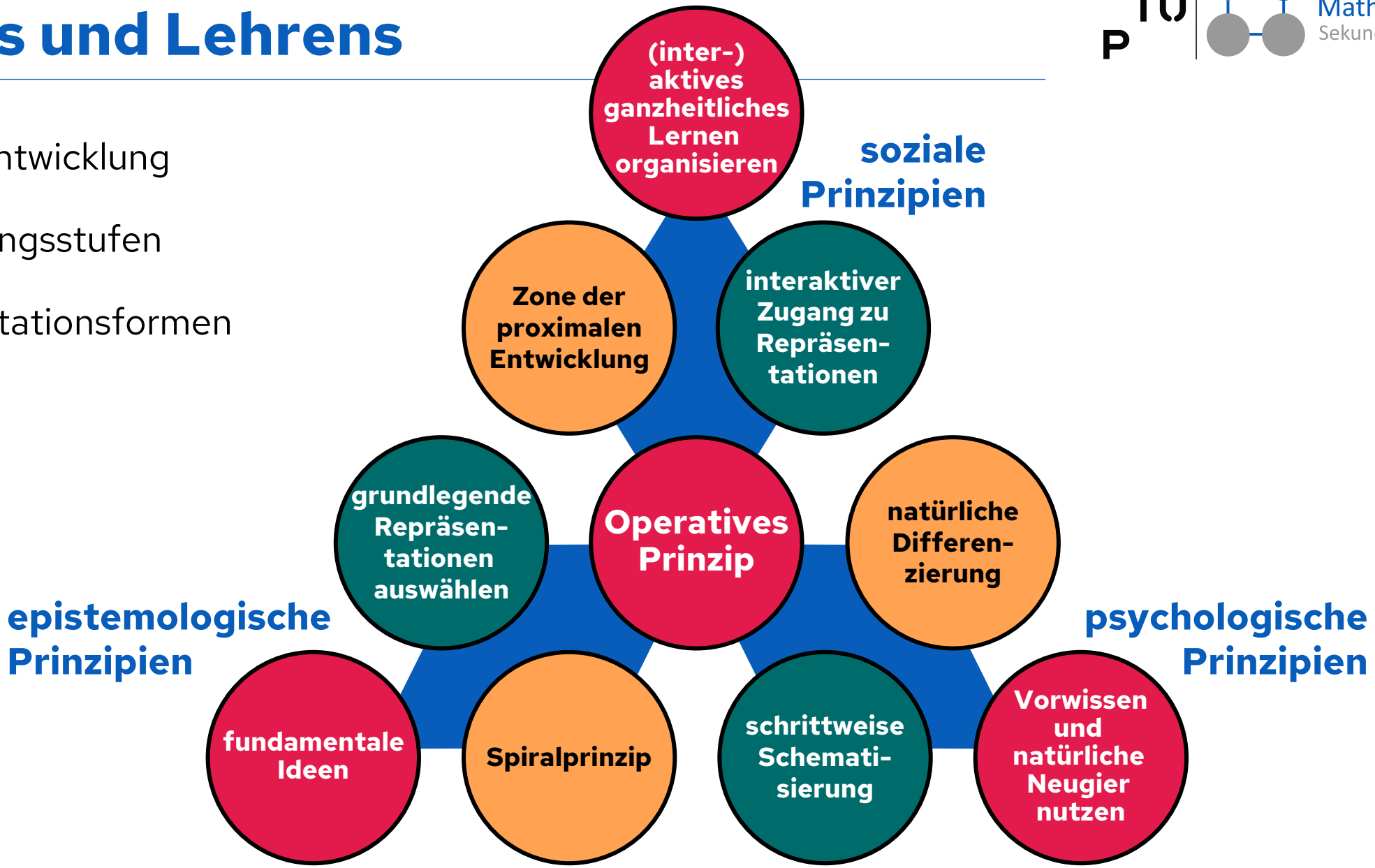
- aktiven Lernens
- (gelenkten) entdeckenden Lernens

Prinzip der

- Realitätsnähe oder Lebensnähe
- Beziehungshaltigkeit
- integrierten Wiederholung
- Isolation der Schwierigkeiten
- Selbsttätigkeit
- Variation
- adäquaten Visualisierung
- Variation der Veranschaulichungsmittel

Prinzipien des Lernens und Lehrens

- Wissensentwicklung
- Entwicklungsstufen
- Repräsentationsformen



Wittmann, E. Chr. (1998). Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic. *JMD, 19*(2/3), 149-178

Wygotski:
Zone der proximalen (nächsten) Entwicklung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

„Das Gebiet der noch nicht ausgereiften, jedoch reifenden Prozesse ist die **Zone der nächsten Entwicklung** des Kindes“.

(Wygotski, 1987, S. 83)

„Was das Kind heute in Zusammenarbeit und unter Anleitung vollbringt, wird es morgen selbständig ausführen können. Und das bedeutet: Indem wir die Möglichkeiten eines Kindes in der Zusammenarbeit ermitteln, bestimmen wir das Gebiet der reifenden geistigen Funktionen, die im allernächsten Entwicklungsstadium sicherlich Früchte tragen und folglich zum realen geistigen Entwicklungsniveau des Kindes werden. Wenn wir also untersuchen, wozu das Kind selbständig fähig ist, untersuchen wir den gestrigen Tag. Erkunden wir jedoch, was das Kind in Zusammenarbeit zu leisten vermag, dann ermitteln wir damit seine morgige Entwicklung“.

(Wygotski, 1987, S. 83)

Wygotski, L. (1987). Ausgewählte Schriften. Band 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein

Operatives Prinzip

Voraussetzungen

Bruner
Wissensrepräsentation
- enaktiv (handelnd)
- ikonisch (bildhaft)
- symbolisch

Piaget
Stufen der kognitiven Entwicklung

Aebli
Verinnerlichungsstufen
- konkrete Stufe
- figurale Stufe
- symbolische Stufe

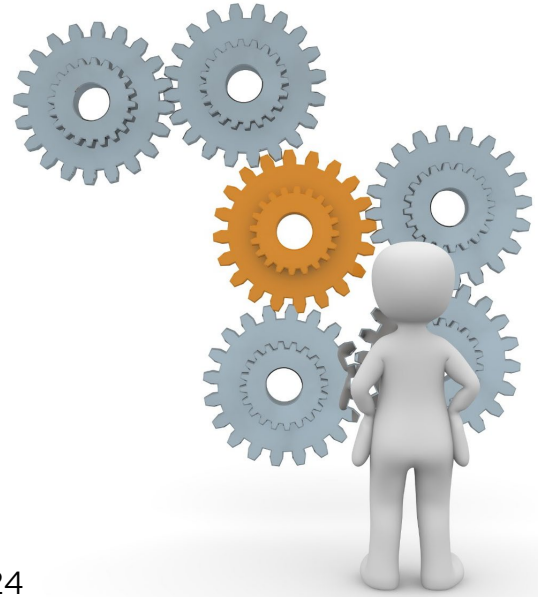
Operatives Prinzip

Variation
- Darstellungsebene
- „Unwesentliches“ (Veranschaulichungsmittel, mathematische Variablen, Kontext, ...)

- Ausgangssituation (Was passiert mit ... , wenn ... ?)
- Lösungsweg
- gesuchte Größen

Prinzip des Operativen Durch-arbeitens

Zuarbeitende Prinzipien
- Stufengemäßheit (vgl. Piaget)
- Aufbauprinzip
- Verinnerlichung
- Reflexion



Zech, F. (1998). Operative Prinzipien. In F. Zech. Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim: Beltz Verlag, 114-124

Operatives Prinzip

Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen

- wie sie konstruiert sind und
- wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen ausgeübt werden.

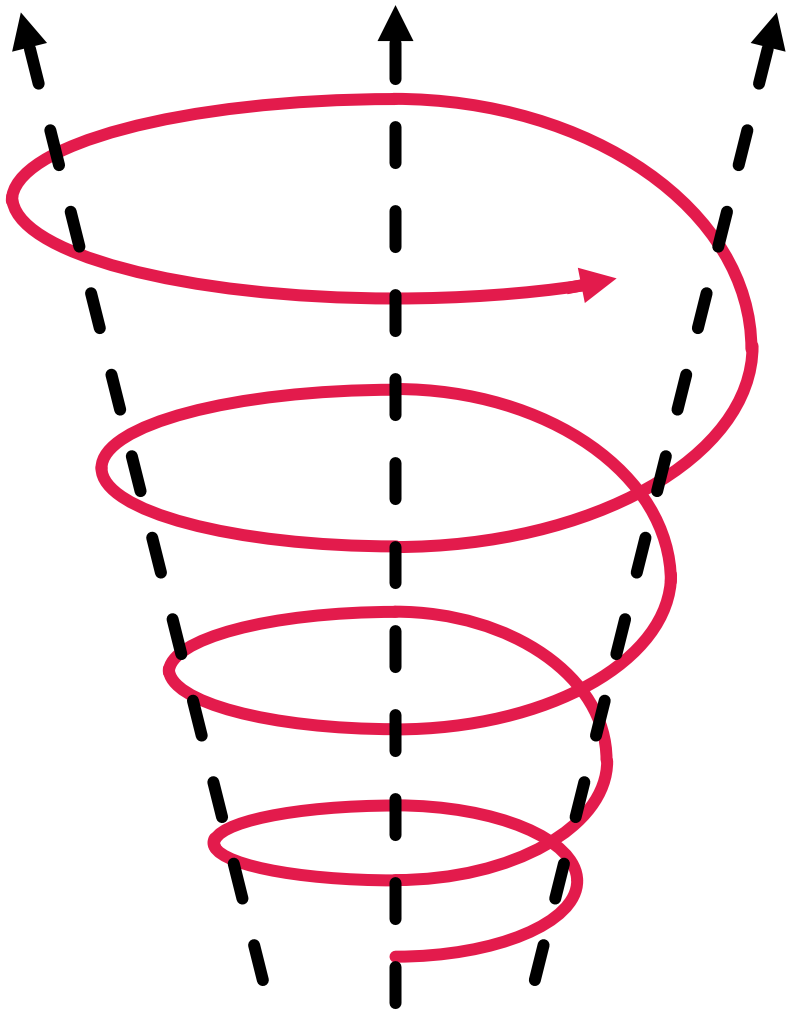
Im Erkenntnisprozess wird systematisch untersucht,

- welche Operationen ausführbar und wie sie verknüpft sind,
- welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt sind,
- welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben.

Wittmann, E. Chr. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren 11*, 7-11

https://www.geogebra.org/m/UAM8pW9t

Spiralprinzip (an fundamentalen Ideen orientiert)



Spiralprinzip

Fundamentalen Ideen (Leitideen) werden im Unterricht in mehreren Durchgängen mit steigendem Niveau behandelt.

Prinzip

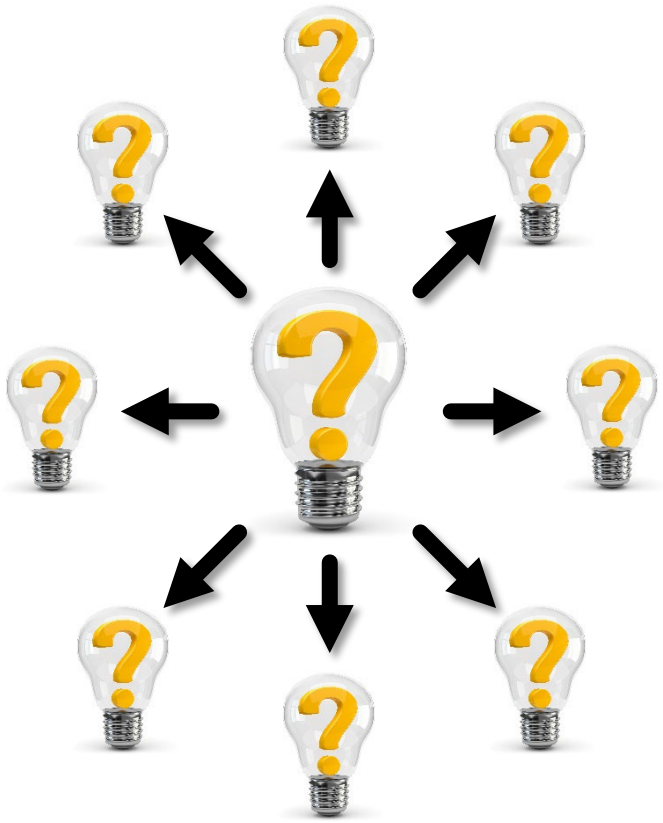
- des vorwegnehmenden Lernens
- der Fortsetzbarkeit

Fundamentale Ideen des MU

- Zahl
- Messen
- räumliches Strukturieren
- funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall
- Algorithmus
- mathematisches Modellieren

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip. *Mathematik lehren 182*, 2-9 • Heymann (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz Verlag, 173-182

Sokratisches Prinzip



Ziel: Lernende lernen Fragen zu stellen.

Lehrprinzip der Mäeutik
Hebammenkunst

Ausgangspunkt
Menon-Sokrates-Dialog

Pädagogische Grundhaltung
Nicht belehren, sondern beim eigenen Entdecken und Urteilen helfen.

Sokratisches Prinzip

- Lehrperson initiiert und steuert durch Fragen den Problemlöseprozess der Schüler/innen
- Lehrperson hilft Schüler/inne/n sich Wissen selbst anzueignen und Verständnis zu entwickeln

Menon-Sokrates-Dialog

Sokrates $A \Rightarrow A' = 2A$
$a = 2\ \text{Fuß} \Rightarrow a' = ?$

Sklave $a' = 2a = 4\ \text{Fuß}$

Sokrates $a' = 2a \Rightarrow A' = ?$

Sklave $A' = 2A$

Sokrates 4 Ausgangsquadrate

Sklave $A' = 4A$

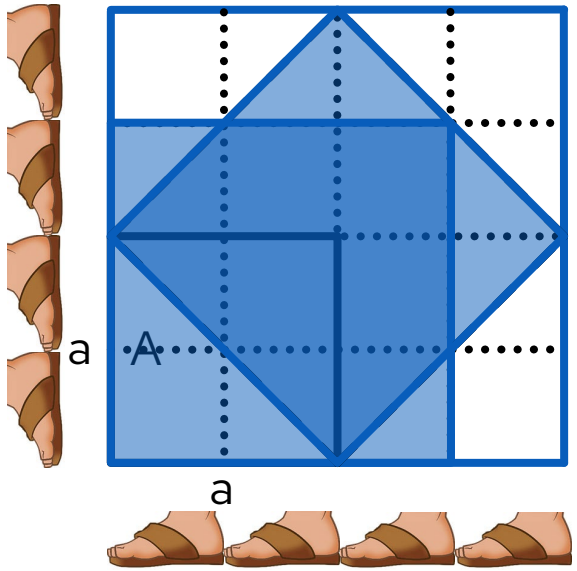
Sokrates $a' = a = 2\ \text{Fuß} \Rightarrow A' = A < 2A$
$a' = 2a = 4\ \text{Fuß} \Rightarrow A' = 4A > 2A$

Sklave $a' = 3\ \text{Fuß}$

Sokrates $a' = 3\ \text{Fuß} \Rightarrow A' = ?$

Sklave $A' = 9\ \text{Fuß}^2 > 8\ \text{Fuß}^2 = 2A$

Sokrates Wie dann?



Sklave ?

Sokrates ...

Platon (1856). Menon (De virtute). In: Platons Werke, zweiten Teiles erster Band, dritte Auflage, Berlin
http://opera-platonis.de/Menon.pdf https://de.wikipedia.org/wiki/Menon

Trichtermuster

Aufgabe: Eine Heilquelle hat eine Ausschüttung von $200hl$ pro Stunde. Welche Wassermenge liefert sie
a) täglich, b) monatlich, c) jährlich?

Lehrerin … da ist kein bestimmter Monat angegeben, dann nimmt man 30 Tage und rechnet mit den 30 Tagen, und in a) ist ja die Wassermenge von einem Tag schon angegeben. Und wie viel ist das für einen Monat?

Schülerin (schweigt)

Lehrerin Na, du weißt, ein Monat hat 30 Tage …

Schülerin (bejahend) … Hm …

Lehrerin Und nun?

Schülerin (schweigt)

Lehrerin Eine Stunde, du brauchst ja jetzt noch gar nicht zu sagen, wie viel ein Tag hat, das musst du ja erst ausrechnen, also ein Tag hat x Hektoliter, nich & dann kannst du x Hektoliter mal wie viel nehmen?

Schülerin (schweigt)

Lehrerin Na, wie viel haben wir gesagt für einen Monat?

Schülerin 30 Tage.

Lehrerin Also x Hektoliter mal 30. Das wären die Hektoliter für einen Monat.

Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im MU. In Bauersfeld, Breidenbach (Hrsg.): Festschrift, Hannover, 158 – 170

Genetisches Prinzip

Genetisch – sokratisch – exemplarisch

Zentrales Anliegen

- Mathematik nicht als Fertigprodukt lehren!
- Schüler/innen sollen einen Einblick in den Prozess der Entstehung von Mathematik erhalten. (Genese = Entstehung, Entwicklung)

Folge

- Unterricht nach genetischem Prinzip ist problemlösender Unterricht
- Begriffe werden als Antworten auf Fragen mit bzw. von den Lernenden entwickelt

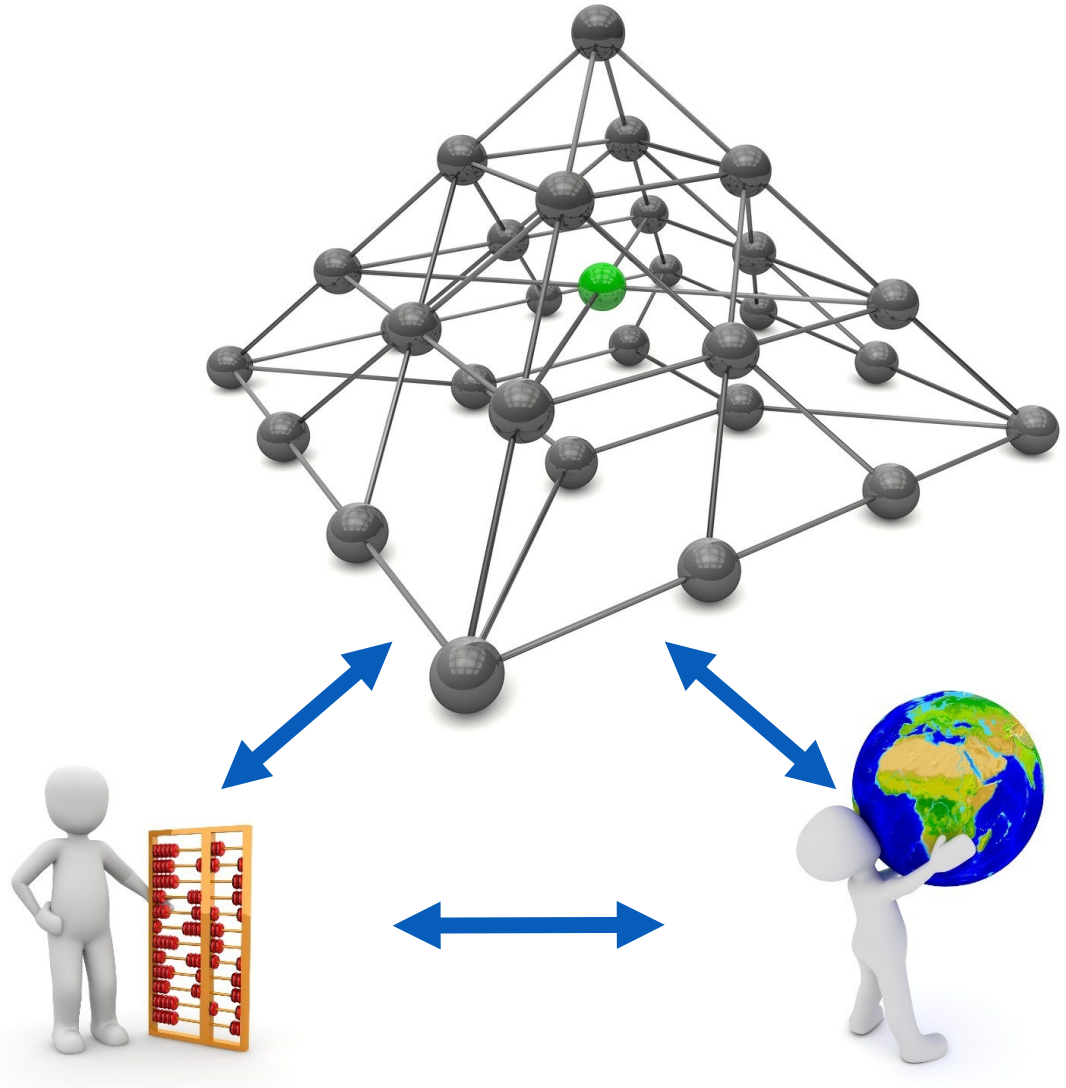
Genetisches Prinzip
Erdumfangsbestimmung (Eratosthenes)

Umfang der Erde?

Aufgabe

- Jedes Jahr am 21. Juni wirft der Obelisk auf dem Marktplatz in Assuan (damals Syene) in Oberägypten zur Mittagszeit keinen Schatten. Die Sonne steht also zu dieser Zeit genau senkrecht über diesem Obelisken.
- Zur gleichen Zeit wirft der Obelisk auf dem Marktplatz im 5000 Stadien (ca. 1000 km) nördlich von Assuan liegenden Alexandria einen deutlich erkennbaren Schatten.
- Eratosthenes hat den Winkel gemess den die Sonnenstrahlen mit dem Obelisken in Alexandria einschlossen. Der Winkel betrug 1/50 des Vollwinkels.
- Wie konnte Eratosthenes damit den Erdumfang bestimmen?
- Welches Ergebnis erhielt er?

Prinzip der Beziehungshaltigkeit



Grundlage

- Wissen wird als Netzwerk von Beziehungen gespeichert.
- Neues Wissen heißt eingliedern in und erweitern von bereits vorhandene(n) Begriffsnetze(n).

Stichworte

- Ausgehen von Vorerfahrungen der SuS
- kumulatives Lernen
- Kompetenzentwicklung erfahrbar machen
- Prinzip der Lebensnähe
- fachübergreifendes Lernen

Prinzip des produktiven Übens

Produktives (sinnvolles) Üben

- ist keine isolierte Tätigkeit,
- ist mit Einsicht verbunden,
- findet regelmäßig statt,
- wird in die Erarbeitung neuer Inhalte integriert,
- geschieht in herausfordernden & anregenden Kontexten,
- orientiert sich an dem, was wirklich gebraucht wird (→ Produkt).

Gegensatz: Stereotypes Üben

- geht nicht auf Fehlerursachen ein,
- bietet keine konstruktive Hilfe,
- trägt zur Verfestigung von Denkfehlern bei.

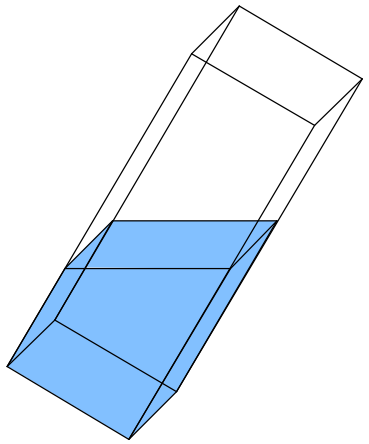
Beispiele

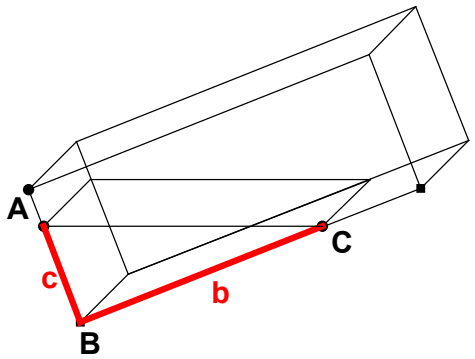
- offene Aufgaben
- Aufgabenvariation

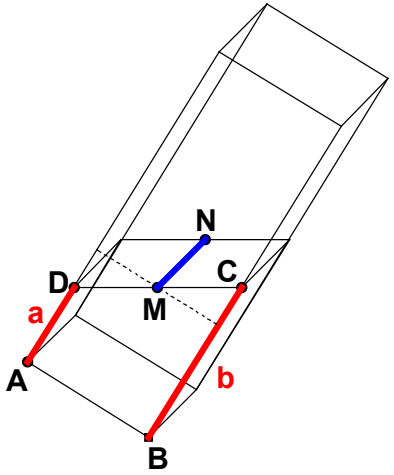
Offene Aufgabe

Aufgabe

- Ein Glasquader wird teilweise mit Wasser gefüllt, auf einen Tisch gestellt und um eine seiner Bodenkanten gekippt.
- Die Grenzflächen des Wassers nehmen beim Kippen verschiedene geometrische Formen an, die sich auch in ihren Ausmaßen verändern.
- Versuchen Sie so viele unveränderliche Beziehungen wie möglich bezüglich dieser Formen und deren Ausmaßen zu finden.
- Notieren Sie Ihre Entdeckungen und versuchen Sie sie zu begründen.







Aufgabenvariation: Strategien

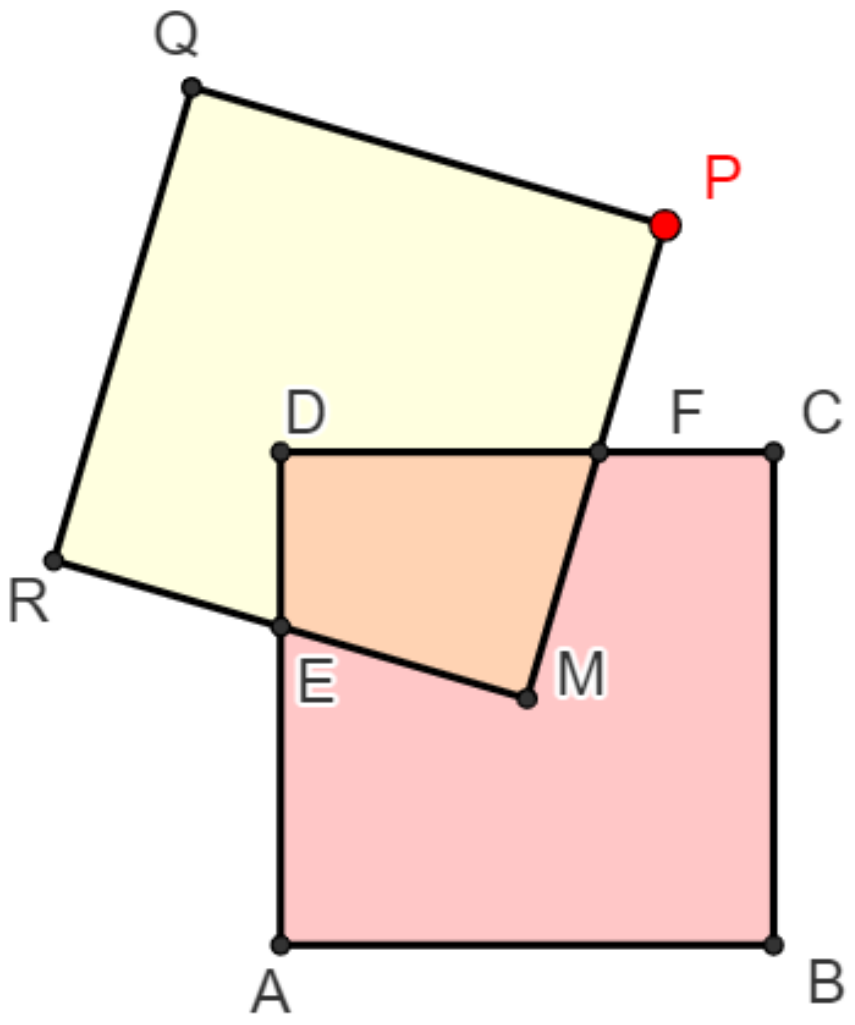
(1) **geringfügig ändern** „wackeln“	(2) **analogisieren** „ersetzen“ bzw. „ändern“ von Bedingungen	(3) **verallgemeinern** „weglassen“ von Bedingungen	(4) **spezialisieren** „hinzufügen“ von Bedingungen
(5) **Grenzfälle betrachten** „ausloten“	(6) **Lücken beheben** „dicht machen“	(7) **in Beziehung setzen** „vergleichen“	(8) **umorientieren** „Ziel ändern“
(9) **sinnvoll machen** „be-sinnen“	(10) **zerlegen** „trennen“	(11) **kombinieren** „vereinigen“	(12) **umzentrieren** „Blick wechseln“
(13) **umkehren** „Richtung wechseln“	(14) **Kontext ändern** „Rahmen wechseln“	(15) **iterieren** „weitermachen“	(16) **anders bewerten** „interessant machen“
(17) **Fragen anschließen** „nachfragen“	(18) **Daten ändern** „aktualisieren“	(19) **kritisieren** „verbessern“	(20) **Variation variieren** „ausweiten“
(21) **Schwierigkeitsgrad abändern** „schwerer oder leichter machen“	(22) **extremalisieren** „ausreizen“	(23) **visualisieren** auf verschiedene Weisen	(24) **einen Umweltbezug herstellen** „anwenden“
(25) **dokumentieren/präsentieren** für unterschiedliche Adressaten	(26) **Beziehungsnetze herstellen** unterschiedlicher Art	(27) **lokal ordnen**	

Schupp, H. (2003). Variatio delectat! *Der Mathematikunterricht, 49*(4), 4-12 und 53

Aufgabenvariation
Überlappende Quadrate

Aufgabe

- Zwei kongruente Quadrate mit der Seitenlänge a überlappen sich.
- Dabei ist der Mittelpunkt M des roten Quadrats ein Eckpunkt des gelben Quadrats.
- Das gelbe Quadrat kann um den Punkt M gedreht werden.
- Bestimmen Sie die Größe der Schnittfläche EMFD!
- Welches ist der größte (kleinste) Wert, den diese Überlappungsfläche annehmen kann?



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU