Grundlagen des Volumenbegriffs am Beispiel Pyramide

(1) Prinzip und Satz von Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647; Astronom und Mathematiker)
war ein Schüler von Galileo Galilei (1564 – 1642).

Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper sind volumengleich, wenn sie folgende Bedingungen füllen:

(1) Die Grundflächen sind inhaltsgleich und liegen in derselben Ebene.

(2) Jede Parallelebene zur Grundebene schneidet aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen aus.

Satz von Cavalieri

Zwei Körper gleicher Höhe sind volumengleich, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben.

Zum Beweis dieses Satzes ist die Integralrechnung notwendig, er kann also in der Sekundarstufe I nicht durchgeführt werden.

$$\forall_{x\in[0,h]}\ A_1(x) = A_2(x) \Rightarrow V_1 = \int_0^h A_1(x)dx = \int_0^h A_2(x)dx = V_2$$

Der Satz kann aber mit Hilfe eines Stapels aus Bierdeckeln plausibel gemacht werden. Man schichtet die Bierdeckel zu einem Stapel auf und verformt diesen. Der Stapel aus Bierdeckeln veranschaulicht die Zerlegung eines Körpers in (unendlich) dünne Scheiben. Alle so erzeugten Körper sind volumengleich, da die einzelnen Bierdeckel (Scheiben) jeweils kongruent sind.

(2) Grundlagen des Volumenbegriffs

Die theoretischen Grundlagen des Volumenbegriffs sind weitgehend analog zum Flächeninhaltsbegriff. Dem Vieleck in der Ebene entspricht als Körper der Vielflach (Polyeder), z.B. Quader, Prisma und Pyramide. Von elementargeometrischen Zerlegungen spricht man wie bei einer Fläche auch im Raum, wobei sich die Begriffe Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit analog zur ebenen Geometrie definieren lassen. So wie sich jedes Vieleck in ein zerlegungsgleiches Quadrat umformen lässt, so kann z.B. jeder Quader in einen zerlegungsgleichen Würfel umgeformt werden. Auch ein gerades Prisma kann in einen zerlegungsgleichen Quader und damit, durch die Transitivität der Zerlegungsgleichheit, in einen zerlegungsgleichen Würfel umgeformt werden.

Satz

Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Polyeder haben den gleichen Rauminhalt.

Aber die Umkehrung gilt im Raum nicht! Dies besagt der Satz von Dehn:

Satz von Dehn (1901)

Zwei rauminhaltsgleiche Polyeder sind im Allgemeinen weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich.

Beispiel: Zu einem Tetraeder gibt es keinen Würfel, zu dem es zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich ist.

Es existiert als *nicht* zu jedem Polyeder ein zerlegungsgleicher Würfel. Jeder Polyeder ist zwar in Dreieckspyramiden zerlegbar, was der Zerlegbarkeit von Vielecken in Dreiecke entspricht, zu einer Dreieckspyramide gibt es aber nicht immer einen zerlegungsgleichen Würfel.

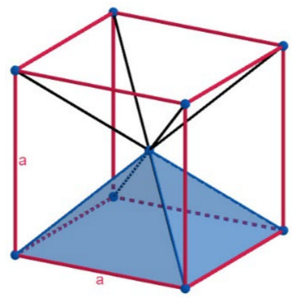
(3) Volumen der Pyramide

Eine Konsequenz aus obigen Ausführungen ist, dass die so einfach aussehende Volumenformel für Pyramiden $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ nicht elementar hergeleitet werden kann, sondern wie bei Körpern mit gewölbten Begrenzungsflächen (Zylinder, Kegel und Kugel) infinitesimale Methoden zu ihrer Gewinnung angewandt werden müssen.

Exkurs: Hinweise auf die Volumenformel ohne allgemeine Begründung

1. Betrachtung eines Spezialfalls

Für einfache Berechnungen an Pyramiden reicht die Betrachtung der regelmäßigen geraden Pyramide, deren Volumen als Spezialfall bestimmt werden kann: Ein Würfel mit Kantenlänge a kann in sechs Pyramiden unterteilt werden, wobei die Würfelseiten die Grundflächen bilden und der Mittelpunkt des Würfels die Spitze jeder der sechs Pyramide ist. Somit sind der Grundflächeninhalt $G = a^2$, die Höhe $h = \frac{a}{2}$ und das Volumen $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}}$ der Pyramide bekannt. Es folgt:



$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

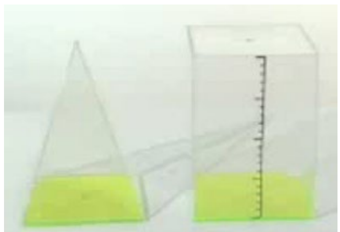
2. Experimentelle Veranschaulichung:

Man benötigt zwei Hohlkörper aus Plexiglas, nämlich eine quadratische Pyramide und einen Quader mit quadratischer Grundfläche, die dieselbe Grundfläche G und dieselbe Höhe h haben und mit Wasser gefüllt werden können.

Für das Volumen des Quaders gilt: $V_{\text{Quader}} = G \cdot h$

Für das Volumen der Pyramide gilt: $V_{Pyramide} = k \cdot V_{Quader} = k \cdot (G \cdot h)$

- Zunächst soll anhand des Modells der Faktor k geschätzt werden. Dabei sind Werte zwischen $k = \frac{1}{4}$ und $k = \frac{1}{2}$ zu erwarten.
- Anschließend wird die Pyramide mit Wasser gefüllt und (mehrfach) in den Quader umgegossen.



Wie viele Wasserfüllungen der Pyramide passen in den Quader?

Ergebnis: $V_{Pyramide} \approx \frac{1}{3} \cdot V_{Quader} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

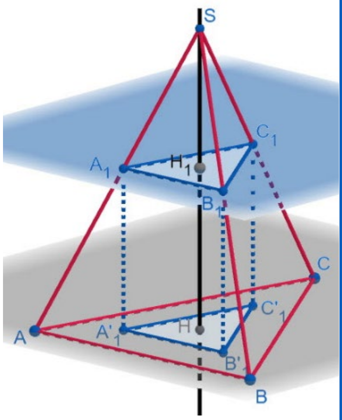
Nachweis der Volumenformel für Pyramiden mit dem Satz von Cavalieri

Die Tatsache, dass für alle Pyramiden die gleiche Volumenformel $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$ gilt, lässt sich mit dem Satz von Cavalieri in drei Schritten nachweisen:

1. Es wird gezeigt: Alle dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h besitzen dasselbe Volumen.
2. Es wird gezeigt: Gültigkeit der Volumenformel für besondere dreiseitige Pyramiden.
3. Es wird gezeigt: Gültigkeit der Volumenformel für Pyramiden mit beliebiger Eckenzahl der Grundfläche.

Exkurs: Zentrische Streckung im Raum

Eine dreiseitige Pyramide $ABCS$ der Höhe h wird von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche der Pyramide ist. Die Schnittfläche bildet das Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$. Die Schnittebene hat den Abstand x von der Spitze. Betrachtet man nun die einzelnen Seitenflächen, so kann man die Figur einer zentrische Streckung mit der Spitze der Pyramide S als Streckungszentrum erkennen, denn Grund- und Schnittebene sind parallel zueinander und folglich auch die entsprechenden Seiten von Grund- und Schnittdreieck.



Damit folgt für den Streckungsfaktor k der Zentrischen Streckung mit Streckungszentrum S:

$$k := \frac{x}{h} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}$$

Analog folgt für die Höhen h_G und h_{G_1} der Dreiecke ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$: $\frac{h_{G_1}}{h_G} = k$

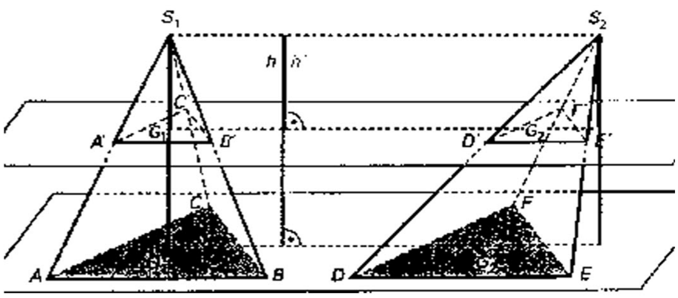
Damit folgt für die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\frac{A_{\Delta A_1B_1C_1}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot g_{G_1}\cdot h_{G_1}}{\frac{1}{2}\cdot g_G\cdot h_G} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \overline{A_1B_1}\cdot h_{G_1}}{\frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot h_G} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \left(k\cdot \overline{AB}\right)\cdot (k\cdot h_G)}{\frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot h_G} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot h_G}{\frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot h_G} = k^2 = k^2$$

Anmerkung: Es ist auch möglich das Schnittdreieck in die Grundfläche zu projizieren. Streckungszentrum ist dann der Höhenfußpunkt H. („Normale" zentrische Streckung in der Ebene!)

1. Nachweis: Alle dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h besitzen dasselbe Volumen:

Es werden zwei Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen $G_{\Delta ABC}$ und $G_{\Delta DEF}$ sowie gleicher Höhe h betrachtet. Nach dem Satz von Cavalieri sind sie volumengleich, wenn jede Parallelebene zur Grundfläche aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen ausschneidet.



Wir betrachten zwei Dreiecke $\Delta A'B'C'$ und $\Delta D'E'F'$ die als Schnittfiguren einer zur gemeinsamen „Grundebene" parallelen Ebene mit den Pyramiden entstehen. Der Abstand der Pyramidenspitzen S_1 und S_2 zu dieser Ebene ist jeweils h'.

S_1 und S_2 können als Zentren räumlicher zentrischer Streckungen aufgefasst werden, die ΔABC auf $\Delta A'B'C'$ und ΔDEF auf $\Delta D'E'F'$ abbilden. Für beide zentrische Streckungen gilt:

$$\frac{\text{Bildfläche}}{\text{Urfläche}} = \frac{G_{\Delta A'B'C'}}{G_{\Delta ABC}} = \frac{G_{\Delta D'E'F'}}{G_{\Delta DEF}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = k^2$$

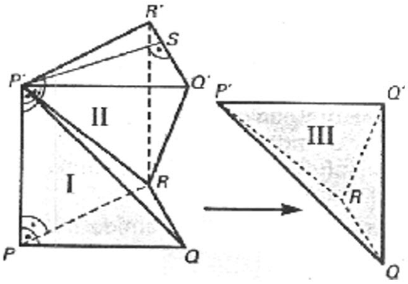
Daraus folgt für die Inhalte der Flächen $G_{\Delta ABC}$, $G_{\Delta DEF}$, $G_{\Delta A'B'C'}$ und $G_{\Delta D'E'F'}$:

$$G_{\Delta A'B'C'} = k^2\cdot G_{\Delta ABC} \overset{G_{\Delta ABC}=G_{\Delta DEF}\text{ nach Vor.}}{\widehat{=}} k^2\cdot G_{\Delta DEF} = G_{\Delta D'E'F'}$$

Damit ist die dritte Bedingung des Prinzips von Cavalieri erfüllt und es gilt:

Satz über das Volumen von Dreieckspyramiden (*)
Dreiseitige Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind volumengleich.

2. Nachweis: Gültigkeit der Volumenformel für besondere dreiseitige Pyramiden



Man zerlegt ein dreiseitiges Prisma mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h, wie im Bild dargestellt, in drei Pyramiden P_{I}, P_{II} und P_{III}.

Vergleich der Volumina V_{I}, V_{II} und V_{III} der Pyramiden P_{I}, P_{II} und P_{III}:

$$G_{\mathrm{I}} = A_{\Delta PQR} \overset{\text{Grund- und Deckfläche des Prismas}}{\triangleq} A_{\Delta P'Q'R'} = G_{\mathrm{II}}$$

$$h_{\mathrm{I}} = \overline{PP'} = h_{\text{Prisma}} = \overline{RR'} = h_{\mathrm{II}}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$$

$$G_{\mathrm{II'}} = A_{\Delta RQ'R'} \overset{\text{Hälften des Rechtecks } QRR'Q'}{\triangleq} A_{\Delta RQQ'} = G_{\mathrm{III}}$$

$$h_{\mathrm{II}} = \overline{SP'} = h_{\mathrm{III}}$$

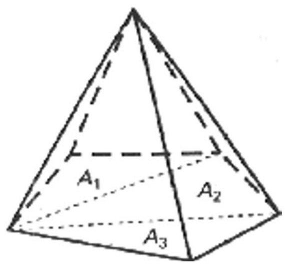
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{III}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} := V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{III}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Prisma}} = V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}} = 3 \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

$$\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Prisma} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

3. Nachweis: Gültigkeit der Volumenformel für Pyramiden mit beliebiger Eckenzahl der Grundfläche



Jede n-seitige Pyramide lässt sich in $n-2$ dreiseitige Pyramiden mit gleicher Höhen h zerlegen (Triangulieren der Grundfläche). Daher folgt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G_1 \cdot h + \frac{1}{3} G_2 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3} G_{n-2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(G_1 + G_2 + \cdots + G_{n-2})}_{=G} \cdot h$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

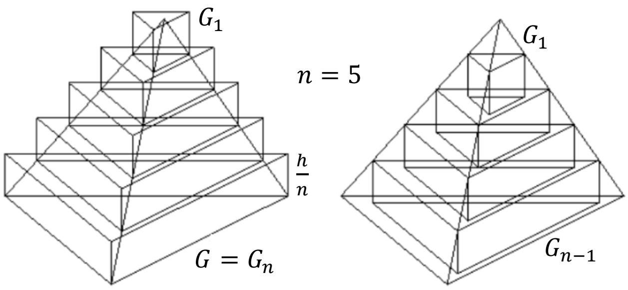
Satz über das Pyramidenvolumen

Für das Volumen V_{Pyramide} einer Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h gilt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Nachweis der Volumenformel für Pyramiden mit Stufenkörpern

Zum Nachweis der Volumenformel für Pyramiden werden hier umbeschriebene und einbeschriebene Stufenkörper aus Prismen benutzt. Die Grundflächen G_1 bis G_n der einzelnen Stufenkörper sind ähnlich zur Grundfläche G der Pyramide. Für ihren Flächeninhalt ergibt sich mit dem Strahlensatz für $k = 1, 2, \ldots, n$:



$$\frac{G_k}{G} = \left(\frac{\frac{k \cdot h}{n}}{h} \right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

Volumen V_u des Stufenkörpers, der der Pyramide umbeschrieben ist:

$$V_u = \sum_{k=1}^{n} V_{\text{Prisma}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(G_k \cdot \frac{h}{n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} \cdot G \cdot \frac{h}{n} \right) = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Volumen V_e des Stufenkörpers, der der Pyramide einbeschrieben ist:

$$V_e = \sum_{k=1}^{n-1} V_{\text{Prisma}_k} = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

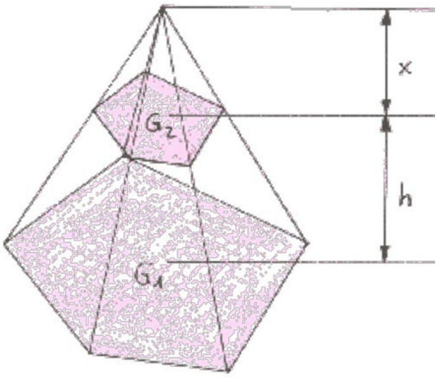
Es gilt $V_e < V_{\text{Pyramide}} < V_u$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(V_u - V_e) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{G\cdot h}{n^3}\cdot n^2\right) = G\cdot h\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$

Daraus folgt, dass sich das Volumen V_{Pyramide} der Pyramide wie folgt berechnen lässt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \lim_{n\to\infty} V_u = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G\cdot h}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{G\cdot h}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{G\cdot h}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{G\cdot h}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}G\cdot h$$

(4) Volumen des Pyramidenstumpfs



Hier erfolgt nur eine Herleitung der Formel.

$V_{\text{Pyramidenstumpf}}$

$= V_{\text{Pyramide}_{\text{groß}}} - V_{\text{Pyramide}_{\text{klein}}}$

$= \frac{1}{3}G_1\cdot(h+x) - \frac{1}{3}G_2\cdot x$

$= \frac{1}{3}\cdot(G_1\cdot h + G_1\cdot x - G_2\cdot x)$

$= \frac{1}{3}\cdot(G_1\cdot h + (G_1 - G_2)\cdot x)$ **(*)**

Aufgrund der räumlichen zentrischen Streckung (vgl. Exkurs: Zentrische Streckung im Raum auf Seite3) gilt außerdem:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{x^2}{(h+x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} = \frac{x}{h+x}$$

$$h\cdot\sqrt{G_2} + x\cdot\sqrt{G_2} = x\cdot\sqrt{G_1}$$

$$h\cdot\sqrt{G_2} = x\cdot\left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{h\cdot\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}} = \frac{h\cdot\sqrt{G_2}\cdot\left(\sqrt{G_1}+\sqrt{G_2}\right)}{\left(\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}\right)\cdot\left(\sqrt{G_1}+\sqrt{G_2}\right)} = \frac{h\cdot\left(\sqrt{G_1G_2}+G_2\right)}{G_1-G_2}$$

Einsetzen in **(*)** liefert:

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{1}{3}\cdot(G_1\cdot h + (G_1-G_2)\cdot x)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(G_1\cdot h + (G_1-G_2)\cdot\frac{h\cdot\left(\sqrt{G_1G_2}+G_2\right)}{G_1-G_2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(G_1\cdot h + h\cdot\left(\sqrt{G_1G_2}+G_2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2\right)\cdot h$$

Satz über das Volumen eines Pyramidenstumpfs
Für das Volumen $V_{\text{Pyramidenstumpf}}$ eines Pyramidenstumpfs mit dem Grundflächeninhalt G_1, dem Deckflächeninhalt G_2 und der Höhe h gilt:

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{1}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2\right)\cdot h$$