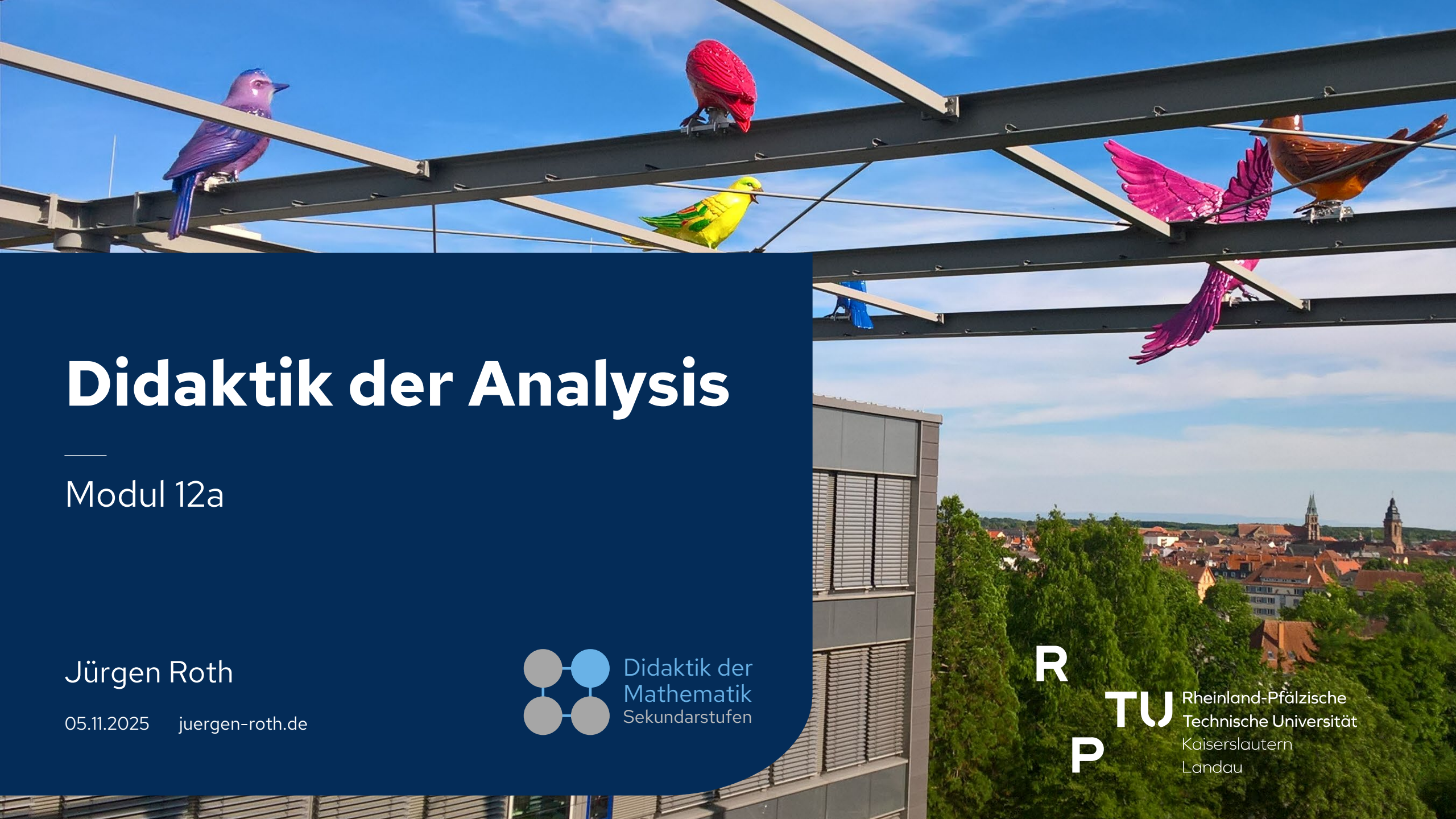


Didaktik der Analysis

Modul 12a

Jürgen Roth

05.11.2025 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Didaktik der Analysis

1. Ziele und Inhalte
2. Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$
3. Ableitungsbegriff
4. Integralbegriff

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

2

Didaktik der Analysis

Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

Woher kamen die Folgen, was leisten sie und warum?

Folgen sind Funktionen mit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge.

Beschreibung iterativer Prozesse

Beispiele:
- Diskrete Modellierung
- Heron-Verfahren

Ist $0,\overline{9} = 1$?

Komplementarität:
- Produktorientierung
- Prozessorientierung

Folgen und Konvergenz

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$
Grundvorstellung: Lückenlosigkeit der Zahlengeraden

$\Leftrightarrow$

Intervallschachtellungssatz und Archimedisches Axiom

Operative Fassung

Berechnungs- & Beweisinstrument

Beispiele:
- Approximation von $\sqrt{2}$
- Beweise: Zwischenwertsatz
  Monotoniekriterium

(Vgl. das Skript „Didaktik der Zahlbereichserweiterungen", Kapitel 5: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$)
Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. 35-38

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

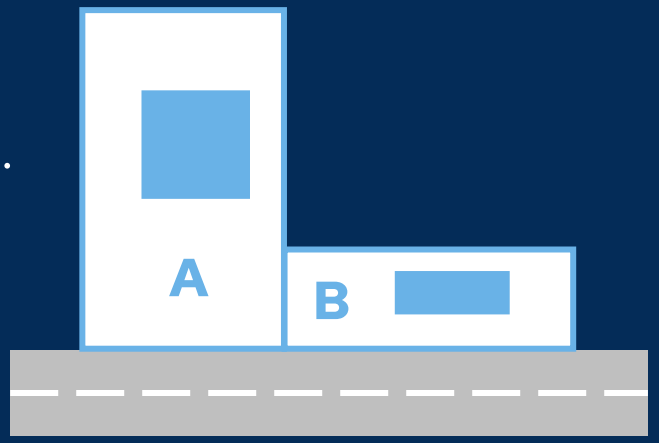
juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

Heron-Verfahren: Quadratwurzelberechnung

Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren

- An die Straße grenzende Grundstückslänge (Frontmetermaßstab).
- Der Eigentümer von Grundstück **B** muss mehr bezahlen als der von Grundstück **A**, obwohl Grundstück **A** größer ist.
- Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.



Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage

Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.

Frage: Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?

Heron-Verfahren: Quadratwurzelberechnung

Gesucht: $\sqrt{A}$

Anfangswert: a_0

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}$$

$$a_0 = 4$$

$$A = 24$$

$$b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{24}{4} = 6$$

$$b_1 = \frac{A}{a_1} = 4{,}8$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 5$$

Heron-Verfahren

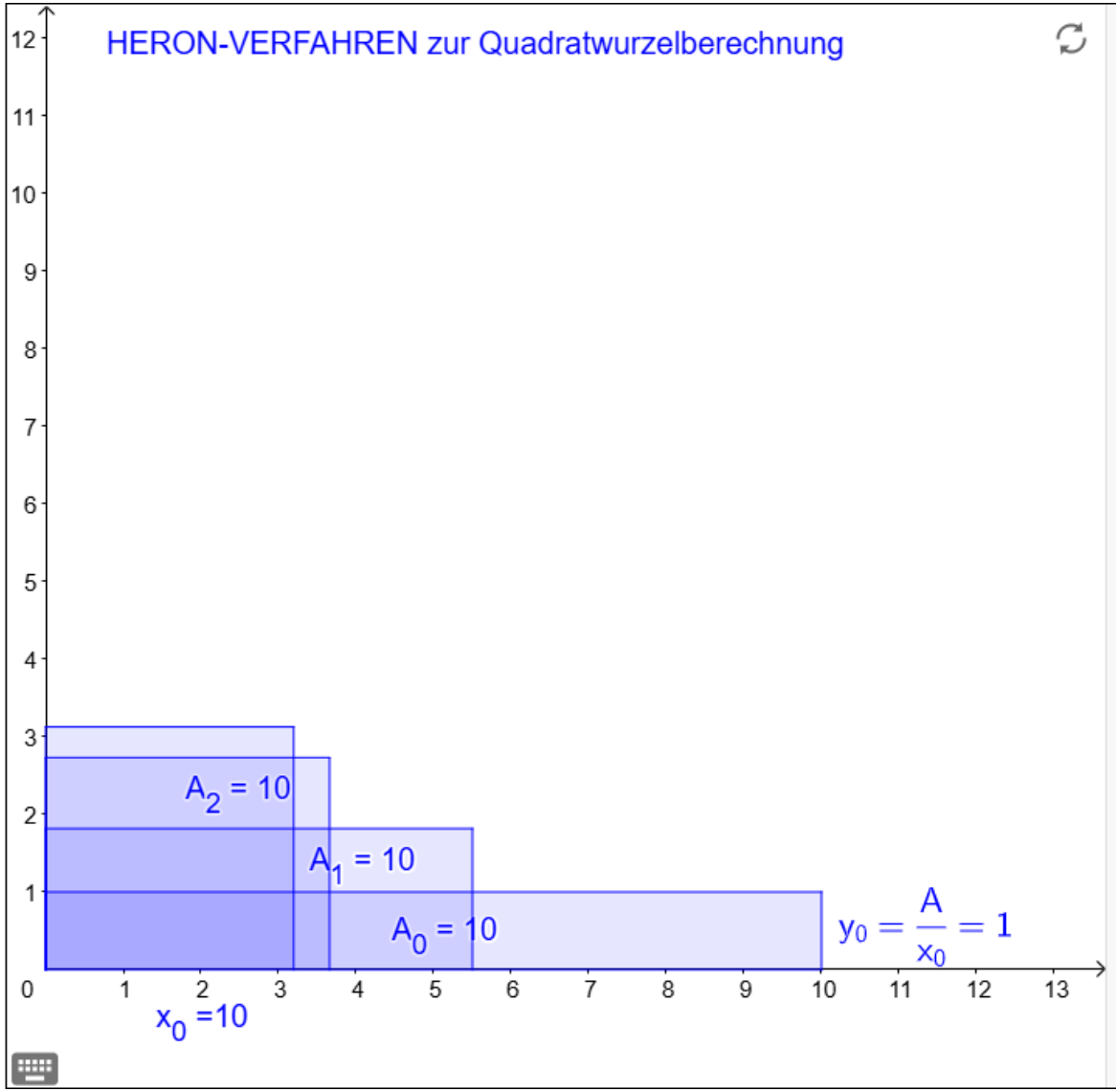
Berechnung der Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt A
bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)

Fläche A	Wurzel aus A
66,00	8,1240384046

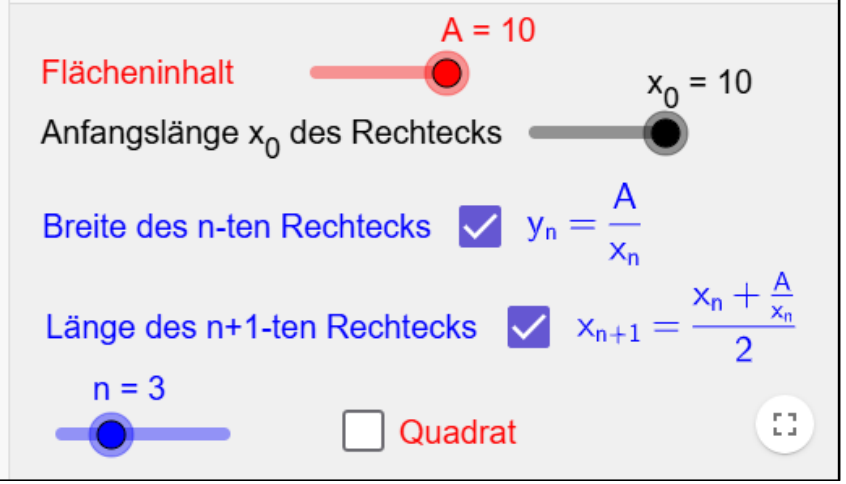
n	a	b = A / a	| a - b |
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende Intervallschachtelung.

Heron-Verfahren: Quadratwurzelberechnung



	A	B	C
1	n	x_n	y_n = A/x_n
2	0	10	1
3	1	5.5	1.8181818182
4	2	3.6590909091	2.7329192547
5	3	3.1960050819	3.1289061637
6	4	3.1624556228	3.1620997075
7	5	3.1622776652	3.1622776552
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602



2-Minuten-Frage

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

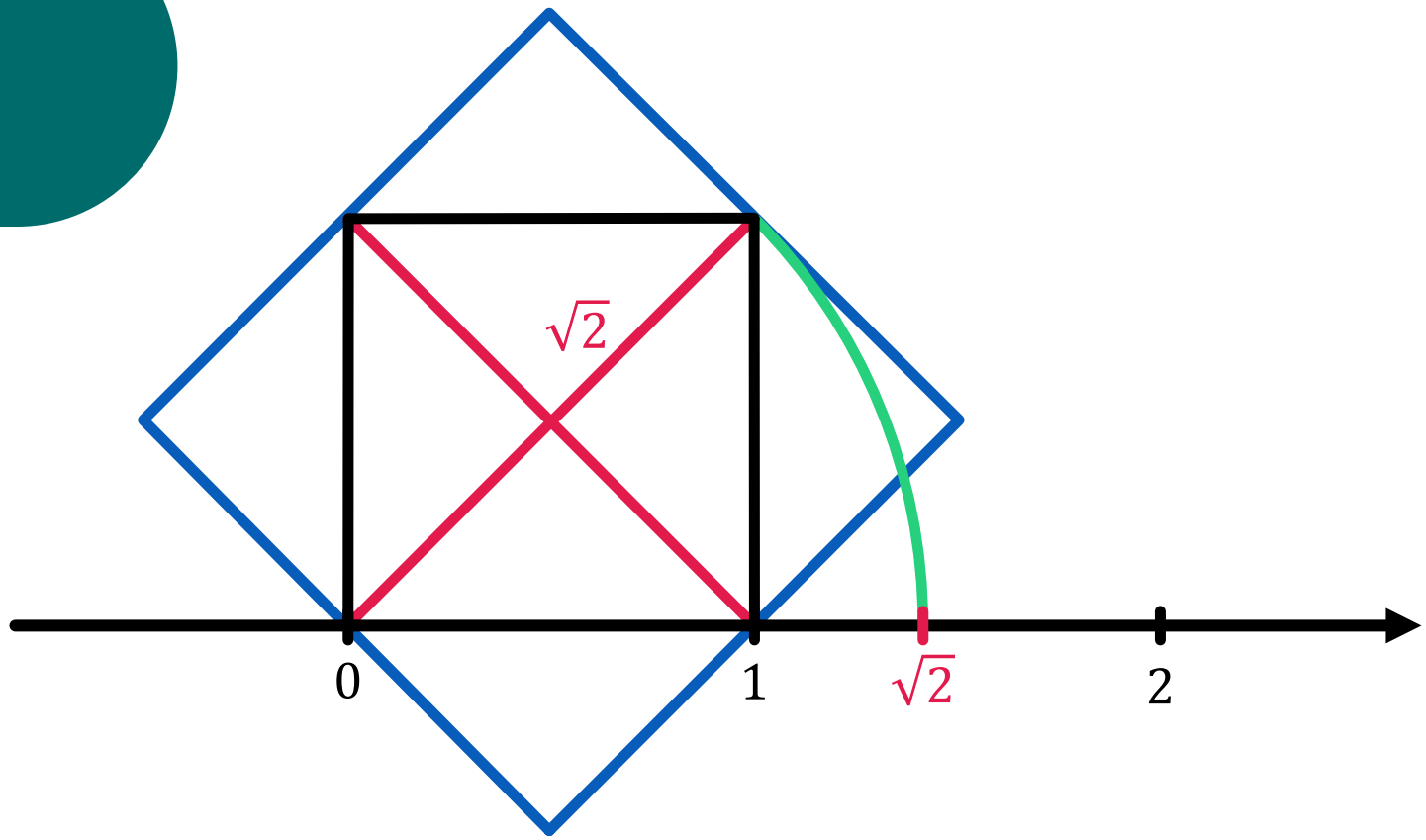
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

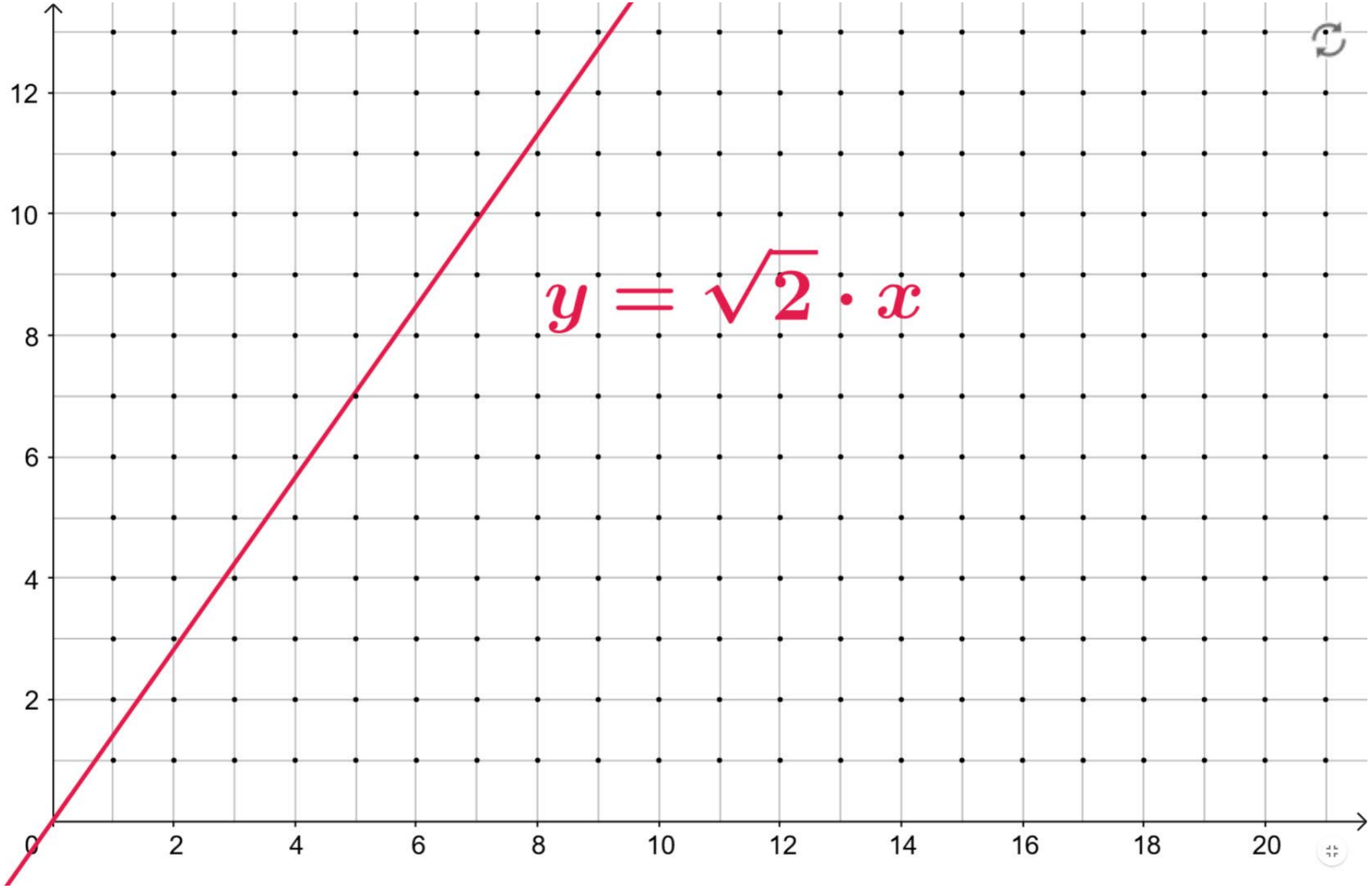
Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen entsprechen eineindeutig den sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.
Arnold Kirsch



Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis Verlag Deubner

Irrationalität von $\sqrt{2}$



https://www.geogebra.org/m/ajsd7mnc

Existenz irrationaler Zahlen

o.B.d.A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**

Satz

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$."

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ ist gerade.

$\Rightarrow m$ ist gerade.

$\Rightarrow m = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2 = 4 \cdot k^2$

$\Rightarrow 4 \cdot k^2 = 2n^2$

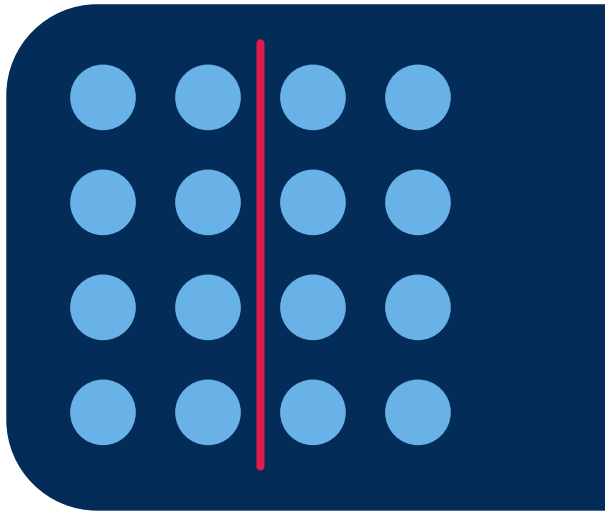
$\Rightarrow 2 \cdot k^2 = n^2$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade.

$\Rightarrow n$ ist gerade.

$\Rightarrow \frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt. 💣

$\Rightarrow$ Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. ■



Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Existenz irrationaler Zahlen

o.B.d.A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**

Satz

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$."

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$

In der Primfaktorzerlegung von $m \cdot m$ tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von $2 \cdot n \cdot n$ tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf.

💣 Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

$\Rightarrow$ Es kann keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben.

■

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Satz (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)
Jedes $n \geq 2$ lässt sich eindeutig schreiben als $n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$, mit Primzahlen $p_1 < \dots < p_k$, $k \geq 1$, und Exponenten $e_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beweis

- **Annahme:** Es gibt natürliche Zahlen mit mehreren unterschiedlichen Zerlegungen. Dann gibt es darunter eine kleinste Zahl n.
- n kann keine Primzahl sein (Warum?).
- Zwei Zerlegungen von n können keinen gemeinsamen Primfaktor p enthalten, da dann auch $\frac{n}{p}$ zwei verschiedene Zerlegungen hätte und kleiner als n wäre.

Widerspruch zu „n ist minimal“.

- Es gilt also $n = p \cdot a = q \cdot b$ mit $p, q \in \mathbb{P} \wedge p \neq q \wedge a \neq b$.
- Das letzte Argument ist das

Lemma von Euklid
Wenn eine Primzahl p ein Produkt teilt, dann teilt p auch mindestens einen der Faktoren. $p|(a \cdot b) \Rightarrow p|a \vee p|b$

- Da n durch p teilbar ist, muss einer der Faktoren der anderen Zerlegung durch p teilbar sein und das ist b, denn q ist prim.
- Also taucht ein beliebiger Primfaktor stets in beiden Zerlegungen auf und damit sind sie identisch.

■

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Ein Kriminalfall Reihenfolge?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zwei Ermittler unterhalten sich. Bringe ihren Dialog in eine mögliche richtige Reihenfolge.

3 Der Routenplaner liefert uns die Information, dass man für die Strecke zwischen München & Frankfurt auch ohne Verkehr knapp 4 Stunden benötigt.

1 Wir nehmen mal an, der Verdächtige ist der Täter.

6 Dann müssen wir also zu dem Schluss kommen, dass der Verdächtige in der fraglichen Nacht an zwei Orten gleichzeitig hätte sein müssen, wenn unsere Annahme zuträfe ...

5 Nun gibt es aber glaubhafte Belege dafür, dass er erst um 23.00 Uhr die Spätschicht in München beendet hat.

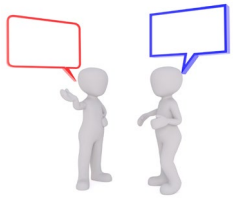
2 Dann hätte er in der Zeit zwischen 1 und 2 Uhr nachts am Tatort in Frankfurt sein müssen.

7 Damit ist unsere Annahme zu einem (sofort einsichtigen) Widerspruch geführt und ihr Gegenteil (der Verdächtige war nicht der Täter) belegt. Wir müssen also einen anderen Täter suchen.

4 Also hätte der Verdächtige spätestens um 22 Uhr in München losfahren müssen und wäre um ca. 23.00 Uhr in Ingolstadt gewesen.

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

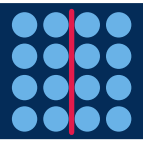
Mathematiker-Dialog



Reihenfolge?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

3 Eine Quadratzahl ist genau dann gerade, wenn ihre Wurzel ebenfalls gerade ist. Das sieht man z.B. so:



1 Wir nehmen einmal an, $\sqrt{2}$ ist rational.
(Ein Motiv gäbe es, schließlich kann man den Wert auf der Zahlengeraden abtragen.)

6 Wenn die Annahme zuträfe, wäre die natürliche Zahl n ungerade und gerade zugleich.

5 Wenn m gerade ist, ist die Hälfte von m wieder eine natürliche Zahl, zum Beispiel p $(m = 2p)$. Also gilt $2 \cdot n^2 = (2p)^2$ und damit $n^2 = 2 \cdot p^2$. Das bedeutet, dass n^2 und damit n gerade ist.

2 Dann müsste man die Zahl als vollständig gekürzten Bruch darstellen können ($\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen m und n). Quadrieren dieser Darstellung ergäbe $2 \cdot n^2 = m^2$, was zeigt, dass m^2 eine gerade Zahl sein muss.

7 Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch und damit ist die Annahme falsch.
$\sqrt{2}$ ist also nicht rational und damit irrational.

4 Also ist m eine gerade Zahl und damit muss n ungerade sein, da sonst $\frac{m}{n}$ kürzbar wäre.

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
1	Wir nehmen einmal an, der Täter ist der Verdächtige.	Wir nehmen einmal an, $\sqrt{2}$ ist rational. (Ein Motiv gäbe es, schließlich kann man den Wert auf der Zahlengeraden abtragen.)	Wie lautet die zu zeigende Behauptung? Was ist ihr logisches Gegenteil, das ich als Annahme formulieren muss?
2	Dann hätte er in der Zeit zwischen 1 und 2 Uhr nachts am Tatort in Frankfurt sein müssen.	Dann müsste man die Zahl als vollständig gekürzten Bruch darstellen können ($\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen m und n). Quadrieren dieser Darstellung ergäbe $2 \cdot n^2 = m^2$, was zeigt, dass m^2 eine gerade Zahl sein muss.	Was kann man aus der Startannahme (relativ) unmittelbar folgern?
3	Ein Routenplaner liefert die Information, dass man für die Strecke zwischen München & Frankfurt auch ohne Verkehr knapp 4 Std. benötigt.	Aus der Betrachtung gerader und ungerader Zahlen ergibt sich die zusätzliche allgemeine Information (z.B. über figurierte Zahlen), dass eine Quadratzahl genau dann gerade ist, wenn ihre Wurzel es ebenfalls ist.	Welche weiteren Informationen (Hilfssätze) kann ich nutzen? Warum können diese Hilfssätze als wahre Aussagen gelten?

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
4	Also hätte der Verdächtige spätestens um 22 Uhr in München losfahren müssen und wäre um ca. 23:00 Uhr in Ingolstadt gewesen.	Also ist m eine gerade Zahl und damit muss n ungerade sein, da sonst $\frac{m}{n}$ noch weiter kürzbar wäre.	Was folgt mithilfe der herangezogenen Informationen für den konkreten Fall? (Wenn hier bereits ein Widerspruch entsteht, ist der Beweis erbracht.)
5	Nun gibt es aber glaubhafte Belege dafür, dass er erst um 23:00 Uhr die Spätschicht in München beendet hat.	Wenn m gerade ist, ist die Hälfte von m wieder eine natürliche Zahl, z. B. p $(m = 2 \cdot p)$. Also gilt $2 \cdot n^2 = (2p)^2$ und damit $n^2 = 2 \cdot p^2$. Das bedeutet aber, dass n^2 und damit n gerade Zahlen sein müssen.	Gibt es weitere Informationen oder Folgerungen aus der Startannahme, die noch hinzugezogen werden können? Passen die Folgerungen zu den vorherigen Ergebnissen?

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
6	Wenn die Annahme der Ermittler zuträfe, hätte der Verdächtige in der fraglichen Nacht an zwei Orten gleichzeitig sein müssen.	Wenn die Annahme zuträfe, wäre die natürliche Zahl n ungerade und gerade zugleich.	Wie kann man den auftretenden Widerspruch als solchen formulieren? Ist es wirklich ein Widerspruch? Schließen sich die Folgerungen logisch aus?
7	Damit ist die Annahme zu einem (sofort einsichtigen) Widerspruch geführt und ihr Gegenteil (der verdächtige war nicht der Täter) belegt.	Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch und damit ist die Annahme falsch. $\sqrt{2}$ ist also nicht rational und damit irrational.	**Rückschau** Worin besteht der Widerspruch und welche Aussage wurde dadurch als falsch entlarvt? Was gilt damit für ihr Gegenteil? Ist das einleuchtend?

Spies, S. (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. *Mathematik lehren, 208*, 16-20

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**

Satz

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

Sei $\boldsymbol{k}$ die kleinste natürliche Zahl, die mit $\sqrt{2}$ multipliziert eine natürliche Zahl ergibt.

Dann ist $\boldsymbol{m} := \boldsymbol{k} \cdot (\sqrt{2} - 1)$ eine noch kleinere Zahl, die mit $\sqrt{2}$ multipliziert eine natürliche Zahl ergibt. 💣 Widerspruch zur Minimalität von $\boldsymbol{k}$

Begründung:

(1) $1 = 1^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 < 2^2 = 4$

$\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2} < 2 \quad (*)$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{k} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) < \boldsymbol{k} \cdot 1 = \boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{k} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \boldsymbol{k} \cdot \sqrt{2} - \boldsymbol{k}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m} \cdot \sqrt{2} = \left(\boldsymbol{k} \cdot \sqrt{2} - \boldsymbol{k}\right) \cdot \sqrt{2} = \underbrace{\underbrace{2 \cdot \boldsymbol{k}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\boldsymbol{k} \cdot \sqrt{2}}_{\in \mathbb{N}}}_{\in \mathbb{N},}$$

da $2 \cdot \boldsymbol{k} > \boldsymbol{k} \cdot \sqrt{2}$ wegen $(*)$ ■

Existenz irrationaler Zahlen

~~$\sqrt{2}$~~ $\sqrt[3]{2}$ ist irrational

Sei k die kleinste natürliche Zahl, die mit $\sqrt[3]{2}$ multipliziert eine natürliche Zahl ergibt.

Sei a die größte natürliche Zahl, die kleiner als $k\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ ist.

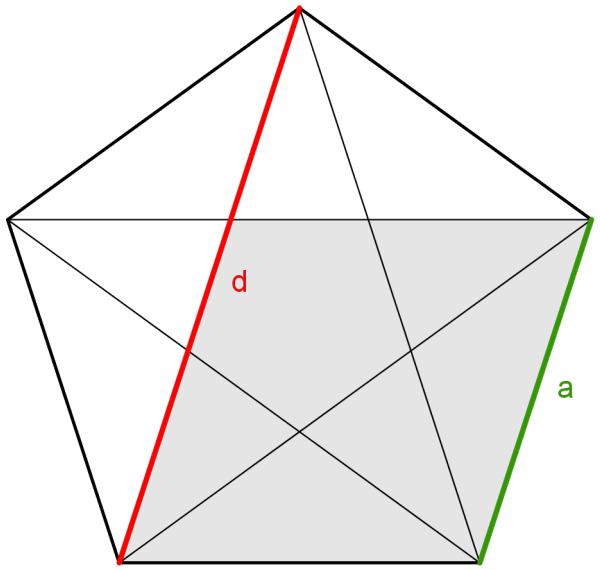
Dann ist $m := k(k\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - a)$ eine noch kleinere natürliche Zahl, die mit $\sqrt[3]{2}$ multipliziert eine natürliche Zahl ergibt.

- $m = k(k\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - a) < k \cdot 1 = k$
- $m = k(k\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - a) = \left(k\sqrt[3]{2}\right)^2 - ak$
- $m \cdot \sqrt[3]{2} = k(k\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - a) \cdot \sqrt[3]{2} = 2k^2 - a \cdot k\sqrt[3]{2}$

 Aus einem Vortrag von Stephan Berendonk, http://stephanberendonk.de/

Inkommensurabilität

Pentagon: Es gibt kein gemeinsames Maß für die Diagonale d und die Seite a des regelmäßigen Fünfecks.

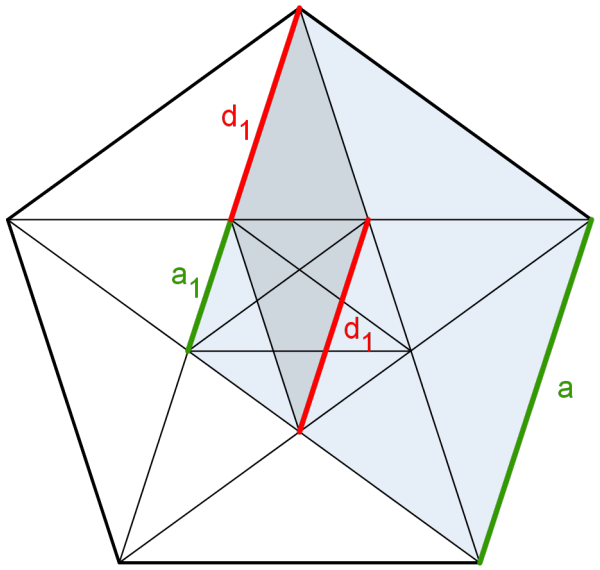


$d = 1 \cdot a + d_1$

$d = 1 \cdot a + d_1$
$a = 1 \cdot d_1 + a_1$

Im zweiten Fünfeck:
$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2$
$a_1 = 1 \cdot d_2 + a_2$

Im dritten Fünfeck:
$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3$
$a_2 = 1 \cdot d_3 + a_3$
...



$a = 1 \cdot d_1 + a_1$

Wäre e ein gemeinsames Maß von d und a, dann auch für jedes Paar (d_n, a_n). Die Längen nehmen aber bei jedem Schritt um mehr als die Hälfte ab und werden damit sicher kleiner als jedes e.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

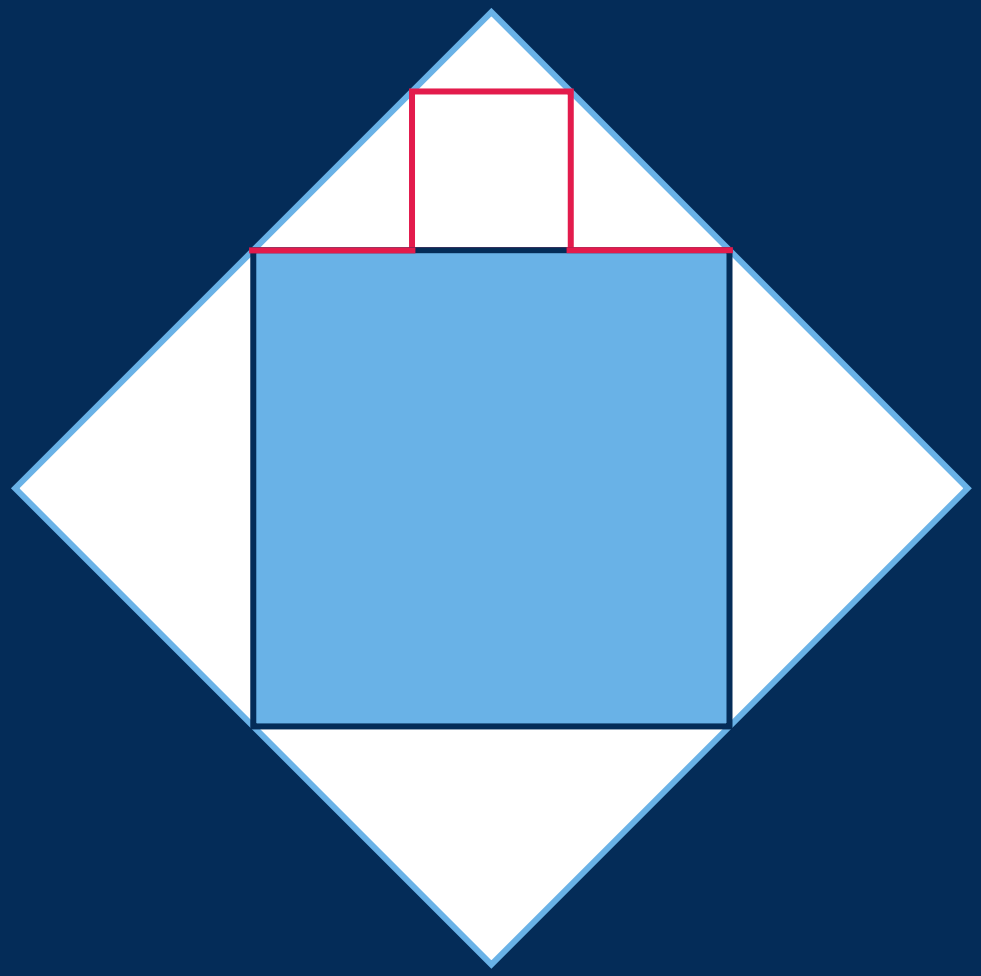
RPTU

Konvergente und divergente Folgen

Figuren-Folge

Die Figuren entstehen aus dem blauen Quadrat schrittweise wie folgt:

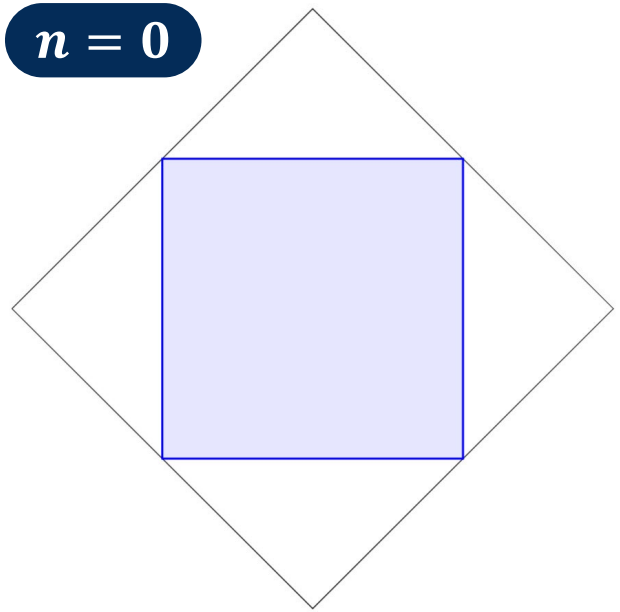
- Jede bisherige Kante der Länge a_n wird gedrittelt.
- Das mittlere Drittel wird parallel zur bisherigen Kante um $\frac{a_n}{3}$ nach außen verschoben.
- Durch die Ergänzung von zwei weiteren Kanten der Länge $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$ bei $\frac{1}{3}a_n$ bzw. $\frac{2}{3}a_n$, die senkrecht auf der alten Kante stehen, wird die Figur geschlossen.
- Dadurch ergibt sich je alter Kante a_n eine neue Teilfläche $a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{3}\right)^2$.
- Zudem wird dadurch jede alte Kante a_n durch fünf neue Kanten a_{n+1} ersetzt.



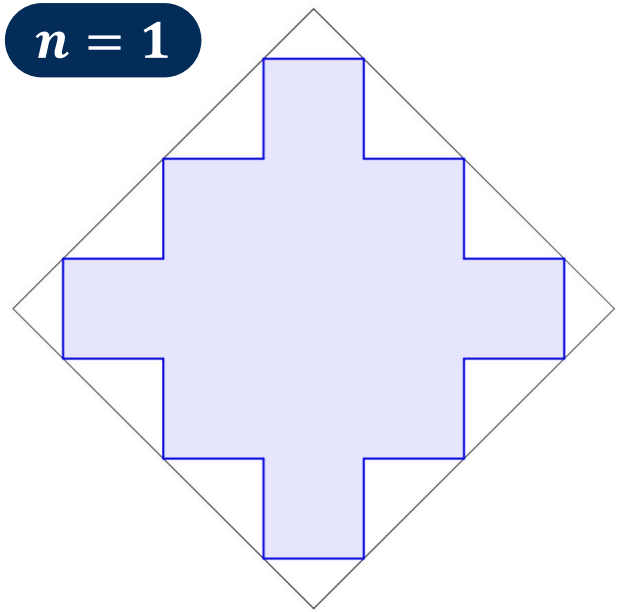
Konvergente und divergente Folgen

Definition: Eine Folge ist eine Funktion, die jedem Element der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ genau ein Element einer Zielmenge $\boldsymbol{Z}$ zuordnet: $\mathbb{N} \to \boldsymbol{Z}, n \mapsto a_n$

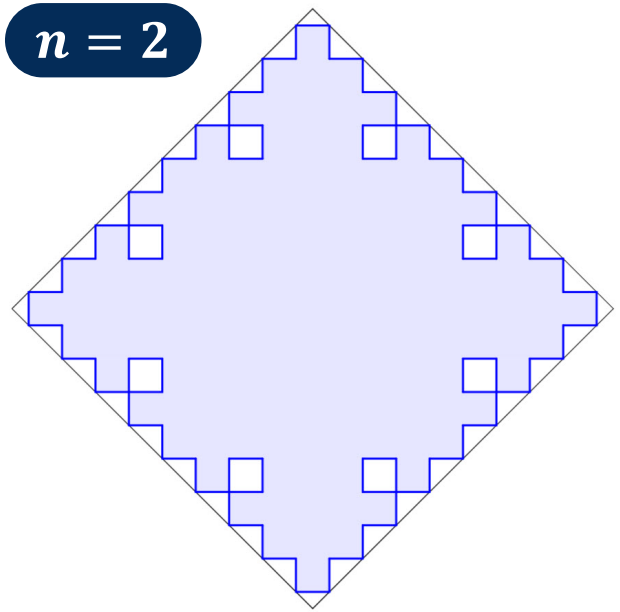
$n = 0$



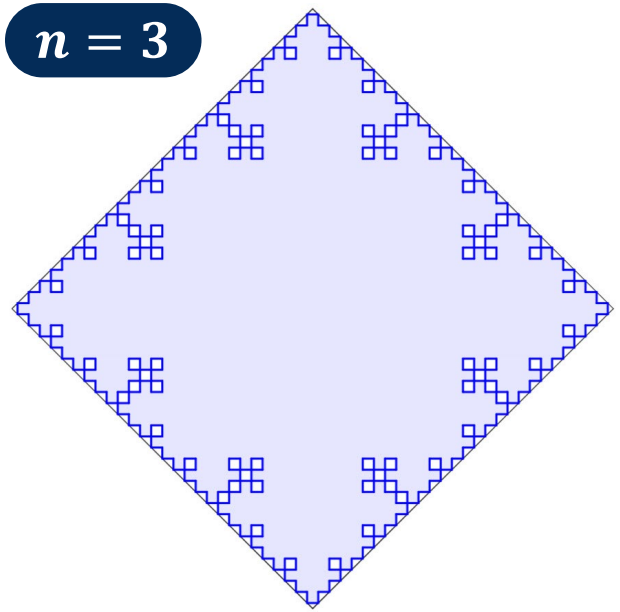
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



a_n: Folge der Flächeninhalte der Figuren

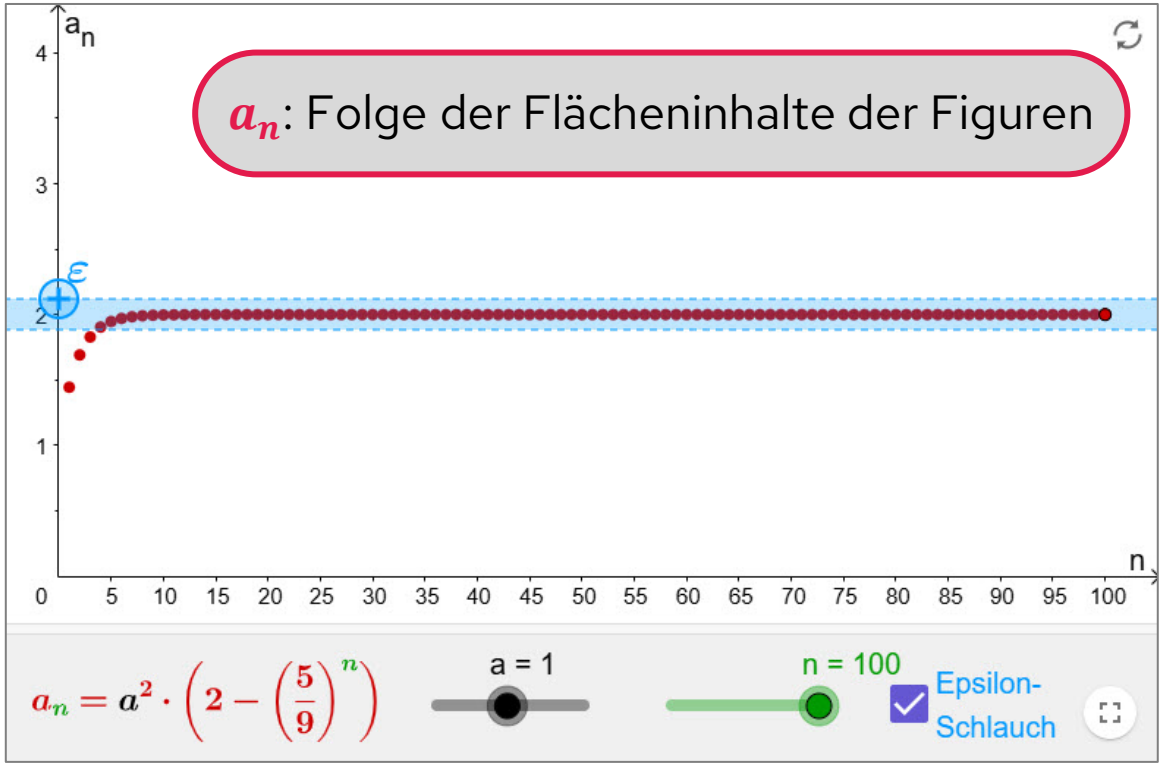
f_n: Folge der Figuren

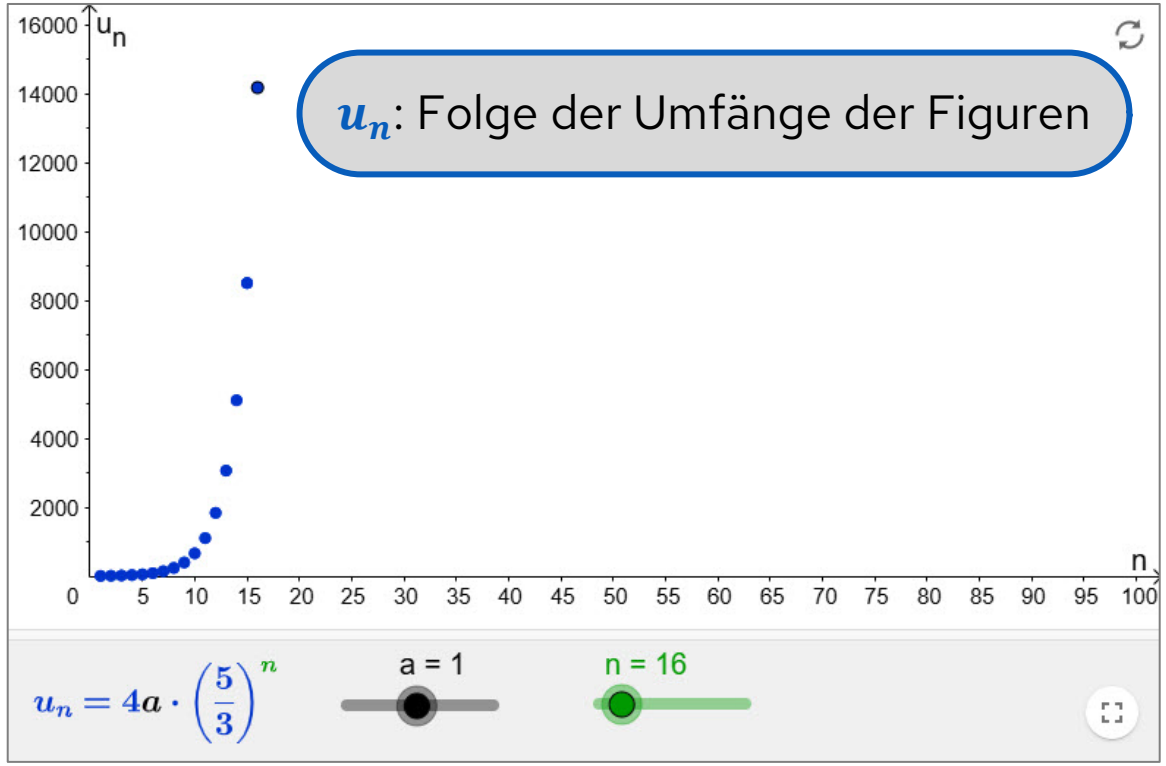
u_n: Folge der Umfänge der Figuren

Konvergente und divergente Folgen

Definition: Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen** a, wenn es zu jeder Toleranz $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

a heißt dann **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$





Grenzwertbegriff: Grundvorstellungen

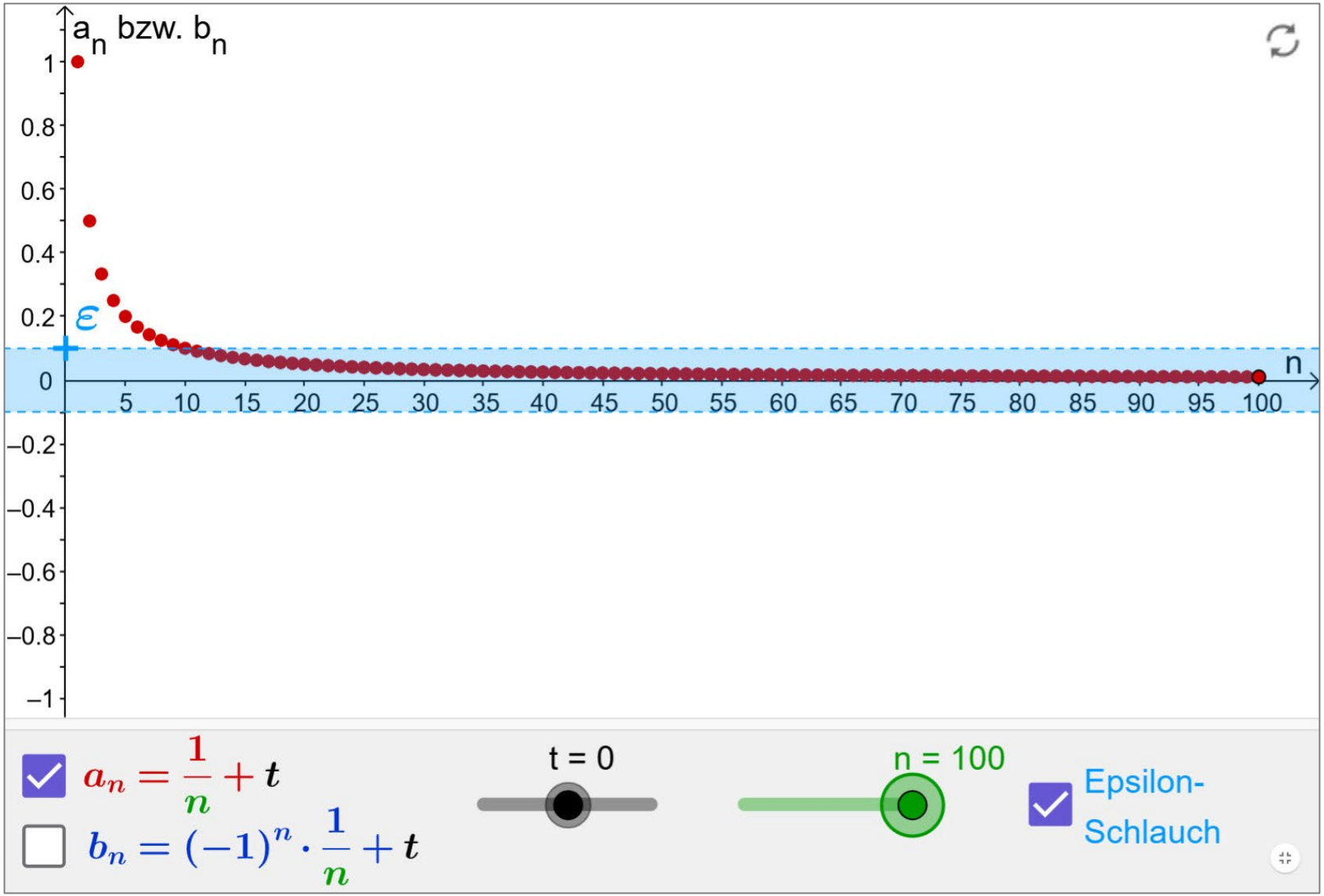
Annäherungsvorstellung
Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Umgebungsvorstellung
Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Objektvorstellung: Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge oder eine Folge von geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

Vgl. Greefrath, G. et al. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum, 103-107

Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und ε-Schlauch



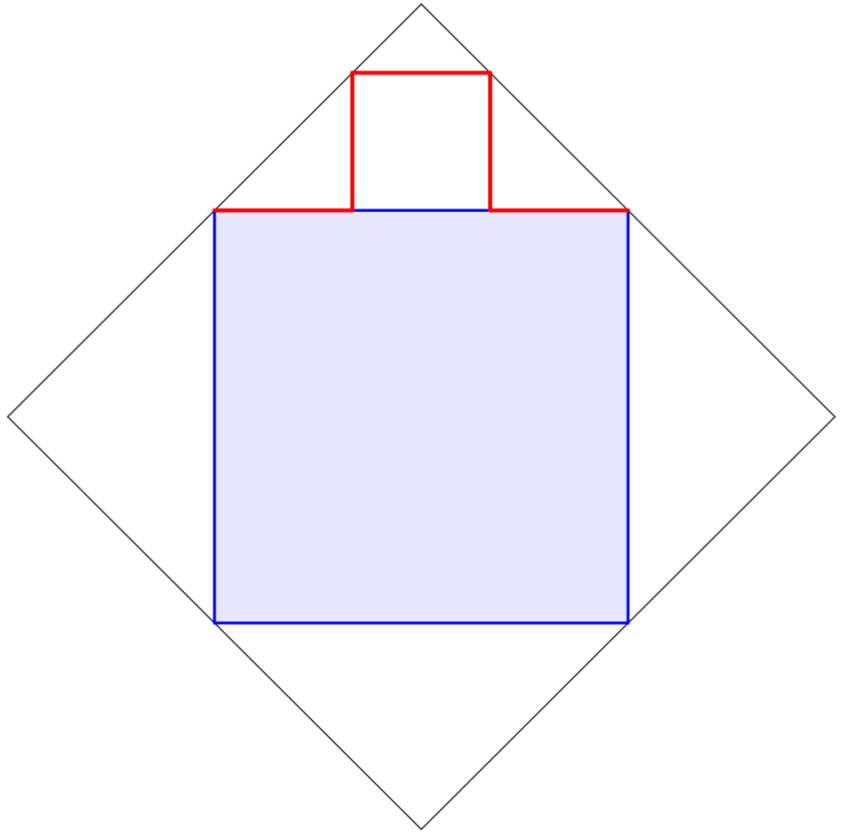
 www.geogebra.org/u/roth • https://www.geogebra.org/m/MvEb6A8q

Sprechweisen für Grenzprozesse

Aufgabe: Konvergenz von $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ für $n \to \infty$: Welche Sprechweisen sind dafür geeignet?

Sprechweisen		Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung
„$a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 beliebig nahe, wenn n gegen ∞ läuft.“	1	1 Ohne Einschränkung geeignet.
„$a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ strebt gegen 2 für n gegen ∞.“	2	2 Ohne Einschränkung geeignet.
„ $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 immer näher, wenn n gegen ∞ läuft.“	3	3 Problematisch! $2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt auch der 3 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. 1)!
„ $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen.“	4	4 Grenze zur inhaltlichen Verfälschung überschritten! Auch konstanten Folgen sind konvergent.

Konvergente und divergente Folgen



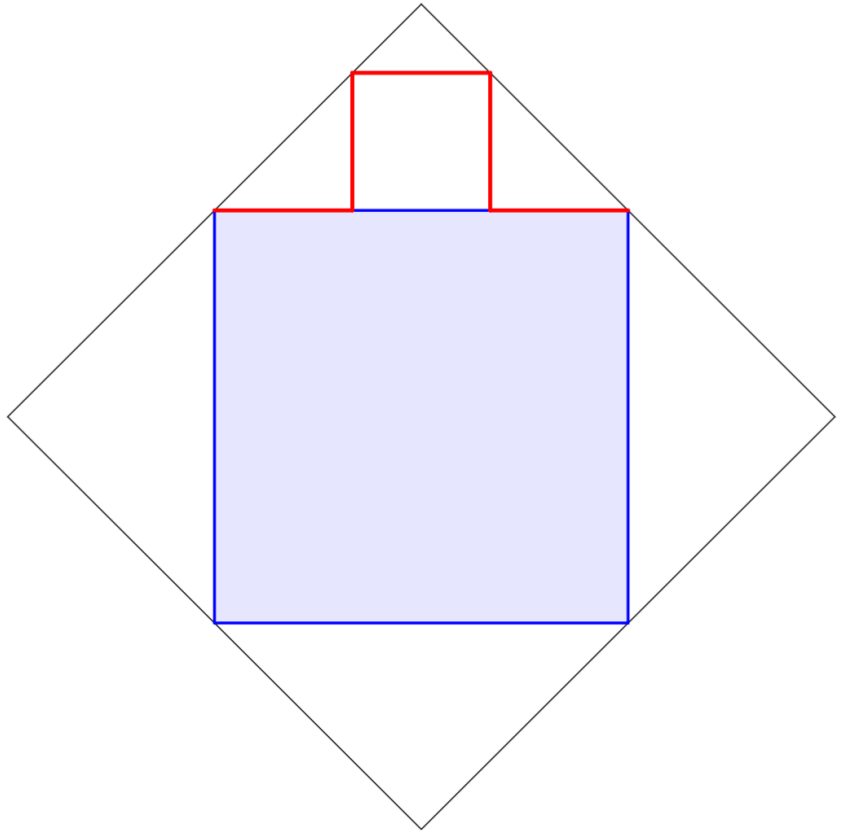
Folge U_n der Umfänge

- $U_0 = 4 \cdot a = 4 \cdot 1\text{ cm} = 4\text{ cm}$
- $U_1 = U_0 + \frac{2}{3} \cdot U_0 = U_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = U_0 \cdot \frac{5}{3}$
- $U_2 = U_1 \cdot \frac{5}{3} = \left(U_0 \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{5}{3} = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2$
- $U_n = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Folge A_n der Flächeninhalte

- $A_0 = a^2 = (1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$
- $A_1 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2}\right)$
- $A_2 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4 \cdot 5}{(3^2)^2}\right)$
- $A_3 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 5^0}{(3^1)^2} + \frac{4 \cdot 5^1}{(3^2)^2} + \frac{4 \cdot 5^2}{(3^3)^2}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{(4 \cdot 5^{k-1})}{3^{2 \cdot k}}\right)$
- $A_n = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(4 \cdot 5^{k-1})}{3^{2 \cdot k}}\right) = a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2 \cdot k}}\right)$

Konvergente und divergente Folgen



Folge A_n der Flächeninhalte (einfachere Darstellung)

$$A_n = a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2\cdot k}}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5^k}{3^{2\cdot k}}\right)\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5^k}{9^k}\right)\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \left[\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^0\right]\right)$$

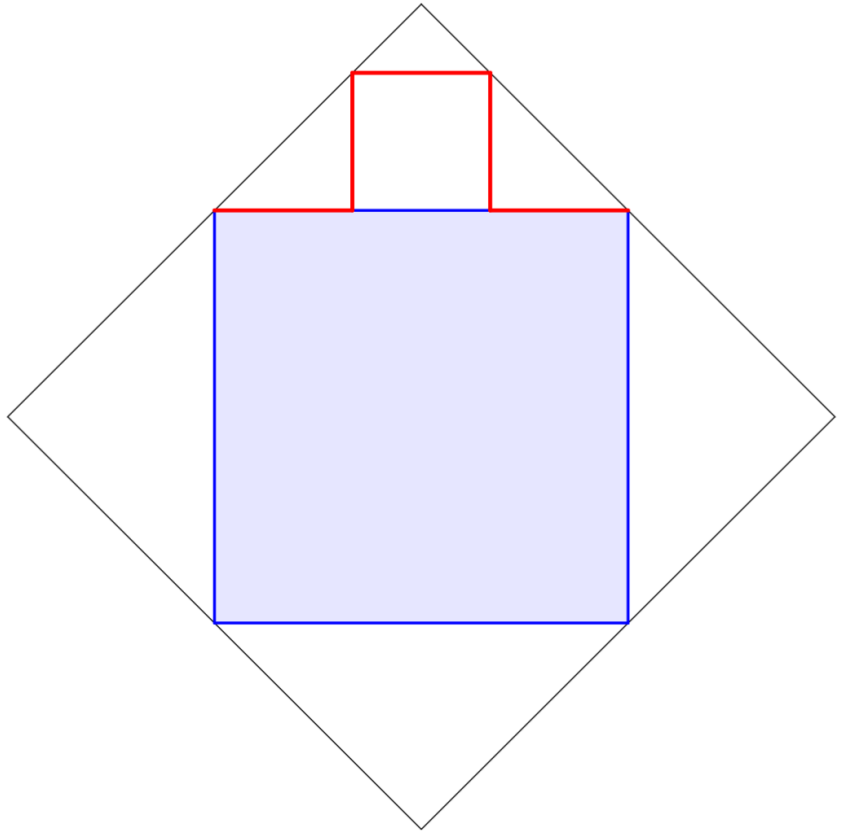
$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k}_{\text{geom. Reihe}} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{9}} - \frac{4}{5}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}\right) - \frac{4}{5}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{5} - \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

Konvergente und divergente Folgen



Konvergenzverhalten

- **Folge U_n der Umfänge divergiert für $n \to \infty$**

$$U_n = 4 \cdot a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot a \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{3}}_{>1}\right)^n}_{\to\infty \text{ für } n\to\infty} = \infty$$

- **Folge A_n der Flächeninhalte konvergiert für $n \to \infty$**

$$A_n = a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a^2 \cdot \left(2 - \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{9}}_{0<\frac{5}{9}<1}\right)^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\right) = a^2 \cdot 2$$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

2.1 Folgen?!

2.2 Heron-Algorithmus

2.3 Reelle Zahlen

2.4 Folgen und Konvergenz

2.5 Zentrale Sätze

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/

RPTU

Intervallschachtelungen

Intervallschachtelungssatz

Zu jeder Intervallschachtelung

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

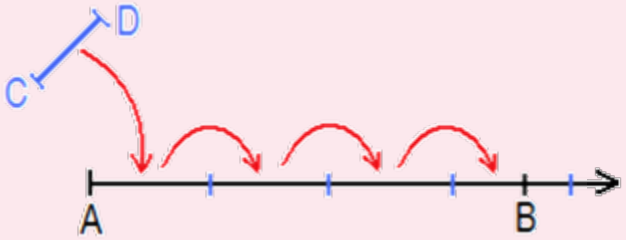
mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und beliebig klein werdender Intervalllänge $b_n - a_n$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also:

$$a_n \leq x \leq b_n$$

Archimedisches Axiom

Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.



Bemerkungen

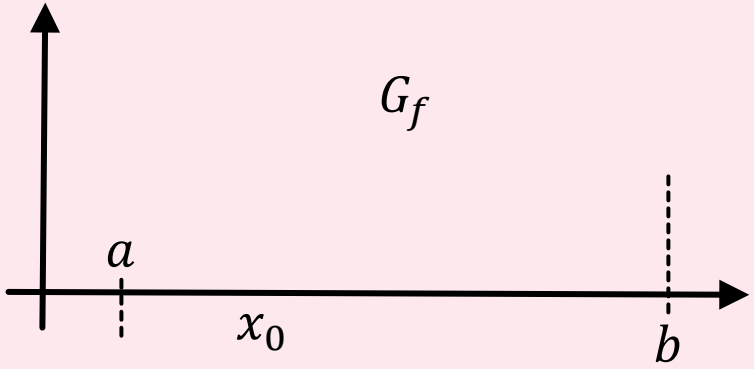
- Die Eigenschaft, dass keine Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden ins Leere trifft, präzisiert die Vorstellung von der Lückenlosigkeit.
- Die Intervallschachtelung greift auf die Folgen der Intervallgrenzen zurück und wird zum Werkzeug zur näherungsweisen Berechnung „neuer“ reeller Zahlen.
- Wird bereits in der Sek. I zur Umfangs-, Flächeninhalts- und Volumenberechnung genutzt.
- Um den Intervallschachtelungssatz anwenden zu können, bedarf es des Archimedischen Axioms: Nur so lässt sich theoretisch absichern, dass die Intervalllängen eine Nullfolge bilden.

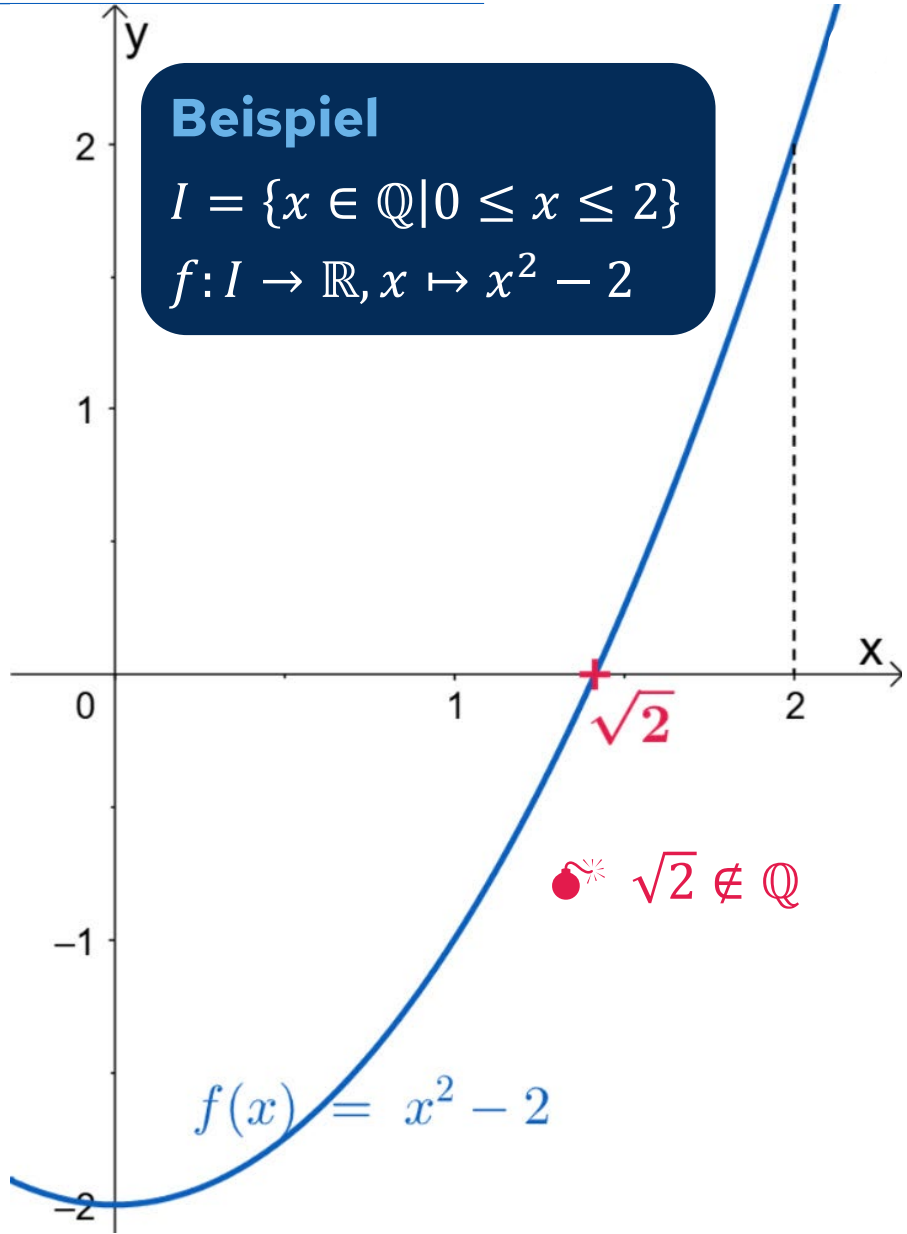
Weiteres zum Archimedischen Axiom: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_für_Nicht-Freaks:_Archimedisches_Axiom

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist notwendig!

Zwischenwertsatz

- Wechselt eine in einem Intervall stetige Funktion ihr Vorzeichen, dann hat sie dort mindestens eine Nullstelle.
- Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ dann gibt es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.





Beispiel

$I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 2\}$

$f: I \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist notwendig!

Monotoniekriterium

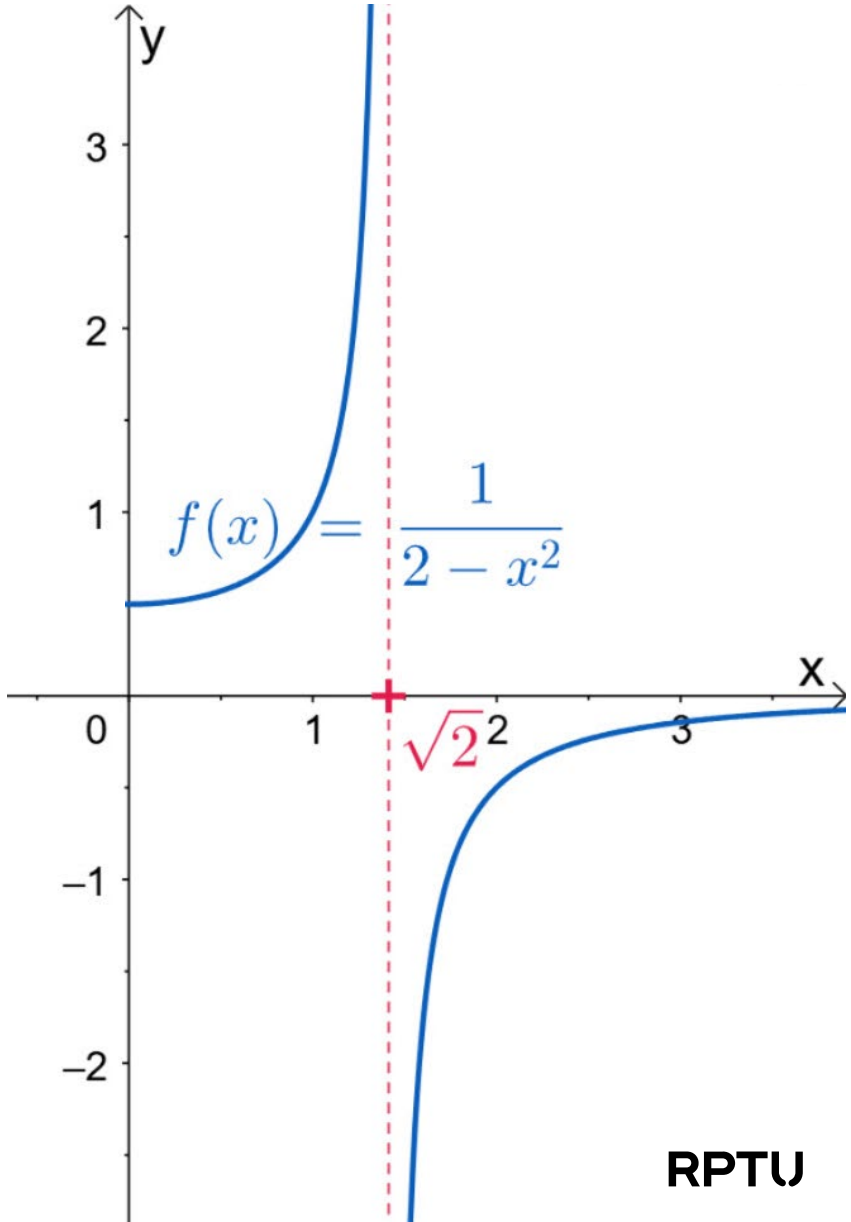
- Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.
- Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann folgt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$, dass gilt:
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Beispiel

$I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 3\}$

- $f: I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2-x^2}$
- $f'(x) = \frac{2x}{(2-x^2)^2} > 0$

💣 Strenge Monotonie verletzt!



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU