6. Übungsblatt

1. *Rechengesetze in* $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

Beweisen Sie, dass in $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ folgende Rechengesetze gelten:

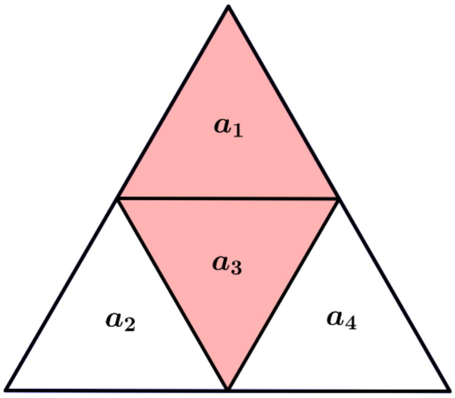
a) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n \cdot ([b]_n + [c]_n) = [a]_n \cdot [b]_n + [a]_n \cdot [c]_n$ **2,5 BE**

b) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ ([a]_n + [b]_n) \cdot [c]_n = [a]_n \cdot [c]_n + [b]_n \cdot [c]_n$ **2,5 BE**

c) $\forall_{[a]_n,[b]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n + [b]_n = [b]_n + [a]_n$ **1 BE**

2. *Dreieckspiel*

Beim Dreieckspiel gibt es vier Felder a_1, a_2, a_3 und a_4 die jeweils zwei Zustände haben, nämlich die Farben Rot oder Weiß annehmen. Im Ausgangszustand sind die drei *„Ecken“* a_1, a_2 und a_4 sowie die *„Mitte“*, also a_3, jeweils weiß. Drückt man auf eine Ecke (z. B. a_1), so wird diese und die Mitte, also a_3, umgefärbt. Auf die Mitte kann man nicht drücken. Die beiden Zustände einer Ecke bzw. der Mitte kann man jeweils als $[0]_2 :=$ weiß bzw. $[1]_2 :=$ rot kodieren. Den aktuellen Zustand des Spielfeldes kann man als Element der Menge $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ darstellen.



Der abgebildete Zustand des Spielfelds lässt sich wie folgt kodieren:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ([1]_2, [0]_2, [1]_2, [0]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Allgemeiner Hinweis: Lesen Sie zum Eindenken in die Vorgehensweise bei diesem Spiel die Erkundung 3.6 in Leuders (2016, S. 63-64).

a) Geben Sie alle Elemente der Menge $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ an. **2 BE**

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ eine Gruppe ist. **8 BE**

c) Stellen Sie die drei möglichen Züge des Spiels

$z_1 :=$ Drücken auf Feld a_1,
$z_2 :=$ Drücken auf Feld a_2 und
$z_3 :=$ Drücken auf Feld a_4

jeweils durch ein Element aus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dar. Der Spielzug besteht dann in der Addition dieses Elements.

Hinweis:
$z_1 :=$ Drücken auf Feld a_1 lässt sich z. B. durch $z_1 = ([1]_2, [0]_2, [1]_2, [0]_2)$ ausdrücken. Ausgehend vom Startzustand $([0]_2, [0]_2, [0]_2, [0]_2)$ erhält man damit wie folgt durch Addition den Zielzustand:

$$([0]_2, [0]_2, [0]_2, [0]_2) + \underbrace{([1]_2, [0]_2, [1]_2, [0]_2)}_{z_1}$$

$$\overset{\text{Definition 3.3.2}}{:=} ([0]_2 + [1]_2, [0]_2 + [0]_2, [0]_2 + [1]_2, [0]_2 + [0]_2)$$

$$\overset{\text{Definition 3.1.1}}{:=} ([0+1]_2, [0+0]_2, [0+1]_2, [0+0]_2) = ([1]_2, [0]_2, [1]_2, [0]_2)$$

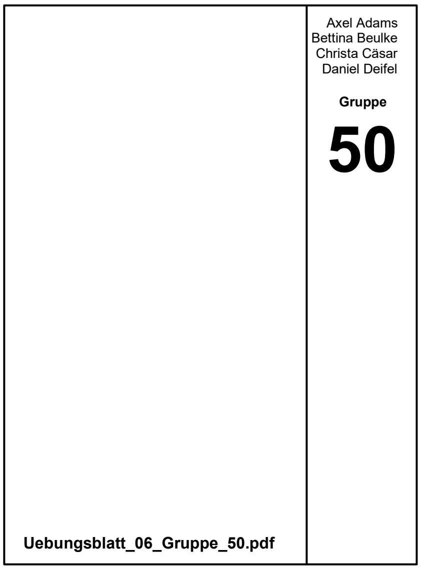
2 BE

d) Bestimmen Sie die von $\{z_1, z_2, z_3\}$ erzeugte Menge $\langle\{z_1, z_2, z_3\}\rangle$, also die Untergruppe $(\langle\{z_1, z_2, z_3\}\rangle, +)$ der Gruppe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. **12 BE**

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: ***30 BE***

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens
  Freitag, 11.07.2025, 10:00 Uhr
  im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch.
- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Gruppen** aus 4 Personen, die im ganzen Semester zusammenarbeiten.
- Bitte beschriften Sie Ihre Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer der (Abgabe-)Gruppe (im Beispiel Gruppe 50).
- Laden Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts in den Ordner Gruppe XX (im Beispiel Gruppe 50) im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch. Benennen Sie diese PDF-Datei wie folgt:
  Uebungsblatt_06_Gruppe_XX.pdf
  (im Beispiel: Uebungsblatt_06_Gruppe_50.pdf).



- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse: **https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie**