6. Übungsblatt

1. Rechengesetze in $(\mathbb{Z}_n, +,\cdot)$

Beweisen Sie, dass in $(\mathbb{Z}_n, +,\cdot)$, bei einem festen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, folgende Rechengesetze gelten:

a) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n \cdot ([b]_n + [c]_n) = [a]_n \cdot [b]_n + [a]_n \cdot [c]_n$ **2,5 BE**

b) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ ([a]_n + [b]_n) \cdot [c]_n = [a]_n \cdot [c]_n + [b]_n \cdot [c]_n$ **2,5 BE**

c) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ ([a]_n + [b]_n) + [c]_n = [a]_n + ([b]_n + [c]_n)$ **1 BE**

2. Idee der Produktgruppen verstehen

Diese Aufgabe soll ihnen helfen, die Idee der Produktgruppen (vgl. Definition 3.3.1) zu durchschauen. Dazu bilden wir aus der Diedergruppe $(D_3,\circ)$ mit der Verkettung $\circ$ von Deckabbildungen als Gruppenverknüpfung und der Gruppe $\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3,\ \cdot\}$ mit der Multiplikation von Restklassen als Gruppenverknüpfung wie folgt eine Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$:

$$D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\} := \{(\varphi, z) | \varphi \in D_3, z \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}\}$$
$$(\varphi_1, z_1) * (\varphi_2, z_2) := (\varphi_1 \circ \varphi_2, z_1 \cdot z_2)$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\forall_{a,b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}}\ a * b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$$

1,5 BE

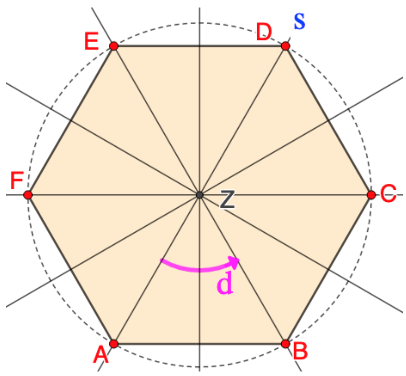
b) Zeigen Sie, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ bzgl. der Verknüpfung $*$ assoziativ ist. **2 BE**

c) Geben Sie das neutrale Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element der Verknüpfung $*$ ist. **2 BE**

d) Zeigen Sie, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ eine Gruppe ist. **5,5 BE**

3. Diedergruppe D_6 mit Hilfe von Permutationen notiert

Die Abbildung zeigt ein reguläres Sechseck, bei dem alle Symmetrieachsen (unter anderem die Achse s) und eine Deckdrehung $d := d_{Z,60°}$, abgebildet sind. Mit Hilfe von Achsenspiegelungen und Drehungen lässt sich die Diedergruppe wie folgt darstellen:



$$\{id, d, d^2, d^3, d^4, d^5, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s\}$$

Diese Menge lässt sich aber auch durch Permutationen in Zykel-Schreibweise darstellen.

a) Geben Sie für jedes Element von D_6 die entsprechende Zykel-Schreibweise an.
Beispiel: $\boldsymbol{d^2 = (ACE)(BDF)}$ **5 BE**

b) Berechnen Sie das Ergebnis der Verkettung nebenstehender Abbildungen, in der Zykel-Schreibweise und geben Sie jeweils auch an, welche Deckabbildung (Drehung bzw. Achsenspiegelung) des regulären Sechsecks sich als Ergebnis der Verkettung ergibt.

$(ABCDEF) \circ (AD)(BC)(EF)$
$(BF)(CE) \circ (AE)(BD)$
$(AEC)(BFD) \circ (AC)(DF)$
$(ABCDEF) \circ (AEC)(BFD)$

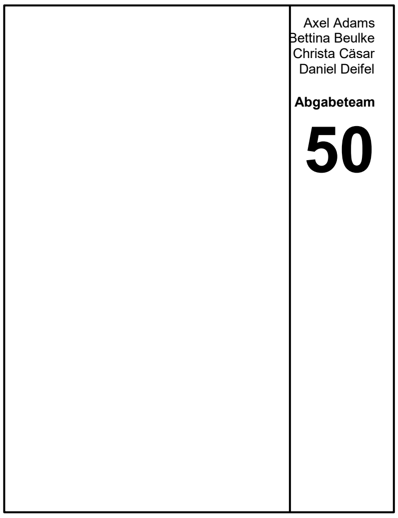
4 BE

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens

  Freitag, 15.07.2022, 10:00 Uhr

  im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch.



- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Abgabeteams** aus jeweils 4 Personen, die im gesamten Semester zusammenarbeiten. Schreiben Sie sich umgehend im **OLAT-Kurs** in ein Abgabeteam ein.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabe-teams (im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften.
- Geben Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts ab. Benennen Sie diese Datei wie folgt:
  {Abgabenteamnummer}_Uebungsblatt_{Übungsblattnr}.pdf
  Ersetzen Sie die geschweiften Klammern mit Ihren jeweiligen Daten.
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse:
  https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie