4. Übungsblatt

1. *Anzahl der Deckdrehungen und -spiegelungen einer Figur*

a) Wenn eine Figur genau vier Deckdrehungen besitzt, wie viele Deckspiegelungen an Spiegelachsen kann sie besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort. ***2 BE***

b) Wenn eine Figur genau vier Deckspiegelungen an Spiegelachsen besitzt, wie viele Deckdrehungen kann sie besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort. ***2 BE***

2. *Diedergruppe D_4 und Vertauschbarkeit – Zentralisator*

a) Die Diedergruppe $(D_4,\circ)$ ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt für Deckabbildungen φ und ψ des Quadrats: $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$
Zu jeder einzelnen Deckabbildung $\varphi \in D_4$ kann man die Deckabbildungen $\psi \in D_4$ finden, für die gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, die also bzgl. der Verkettung von Abbildungen mit φ vertauscht werden dürfen. Die Menge aller Deckabbildungen aus D_4, die bzgl. der Verkettung $\circ$ mit φ vertauscht werden dürfen, nennt man Zentralisator $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi)$ von φ bzgl. $(D_4,\circ)$:

$$Z_{(D_4,\circ)}(\varphi) := \{\psi \in D_4 \mid \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$$

Bestimmen Sie für alle Deckabbildungen des Quadrats jeweils den Zentralisator bzgl. $(D_4,\circ)$ und erläutern Sie jeweils, was das Ergebnis bedeutet. ***8 BE***

b) Diedergruppen D_n sind in der Regel nicht kommutativ. Geben Sie an, welche Diedergruppen kommutativ sind und welche nicht und begründen Sie jeweils, warum das so ist. ***7 BE***

3. *Untergruppenkriterium*

Beweisen Sie folgende Aussage, bei der es sich um eine Richtung des Satzes 2.2.1 aus dem Skript handelt:
Wenn für eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe $(G,\circ)$ folgendes gilt

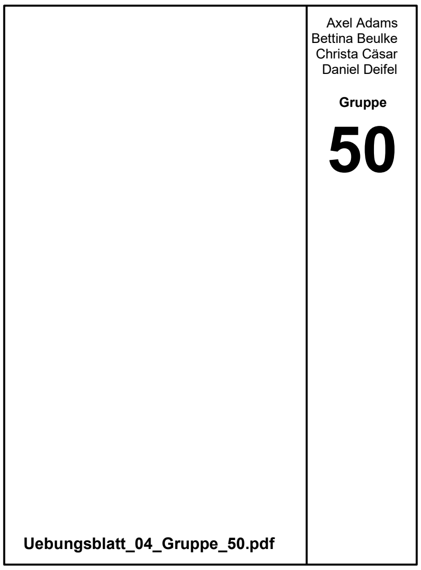
(UG1) $\forall_{a,b\in U}\ a \circ b \in U$ (Abgeschlossenheit) und
(UG2) $\forall_{a\in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in U enthalten),

dann ist $(U,\circ)$ eine Gruppe.
Hinweis: Sie müssen also nachweisen, dass aus $U \subseteq G$, (UG1) und (UG2) alle Gruppeneigenschaften (G0), (G1), (G2) und (G3) folgen. ***6 BE***

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:	***25 BE***

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens
  Freitag, 13.06.2025, 10:00 Uhr
  im OLAT-Ordner Abgaben Übungsblätter hoch.
- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Gruppen** aus 4 Personen, die im ganzen Semester zusammenarbeiten.
- Bitte beschriften Sie Ihre Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer der (Abgabe-)Gruppe (im Beispiel Gruppe 50).
- Laden Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts in den Ordner Gruppe XX (im Beispiel Gruppe 50) im OLAT-Ordner Abgaben Übungsblätter hoch. Benennen Sie diese PDF-Datei wie folgt:
  Uebungsblatt_04_Gruppe_XX.pdf
  (im Beispiel: Uebungsblatt_04_Gruppe_50.pdf).



- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse: https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie