4. Übungsblatt

1. *Eindeutigkeit des neutralen Elements*

Beweisen Sie, dass das neutrale Element e einer Gruppe $(G, \star)$ eindeutig ist. ***3 BE***

Hinweis:
Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

2. *Eine kleine Gruppe?*

Die Menge $\{-1, 0, 1\}$ ist Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
$(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.
(Gemeint ist die „normale“ Multiplikation, die Sie aus der Grundschule kennen.) ***3 BE***

3. *Diedergruppe D_4 und Vertauschbarkeit – Zentralisator*

Die Diedergruppe $(D_4, \circ)$ ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt für Deckabbildungen φ und ψ des Quadrats: $\quad \varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$

Zu jeder einzelnen Deckabbildung $\varphi \in D_4$ kann man die Deckabbildungen $\psi \in D_4$ finden, für die gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, die also bzgl. der Verkettung von Abbildungen mit φ vertauscht werden dürfen. Die Menge aller Deckabbildungen aus D_4, die bzgl. der Verkettung $\circ$ mit φ vertauscht werden dürfen, nennt man Zentralisator $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi)$ von φ bzgl. $(D_4, \circ)$: $\quad Z_{(D_4,\circ)}(\varphi) := \{\psi \in D_4 \mid \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$

Bestimmen Sie für alle Deckabbildungen des Quadrats jeweils den Zentralisator bzgl. $(D_4, \circ)$ und erläutern Sie jeweils, was das Ergebnis bedeutet. ***6 BE***

4. *Untergruppenkriterium*

Beweisen Sie folgende Aussage, bei der es sich um eine Richtung des Satzes 2.2.1 aus dem Skript handelt:
Wenn für eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe $(G, \star)$ folgendes gilt

(UG1) $\quad \forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U \quad$ (Abgeschlossenheit) und
(UG2) $\quad \forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U \quad$ (Inverse in U enthalten),

dann ist $(U, \star)$ eine Gruppe.

Hinweis: Sie müssen also nachweisen, dass aus $U \subseteq G$, (UG1) und (UG2) alle Gruppeneigenschaften (G0), (G1), (G2) und (G3) folgen. ***6 BE***

5. *Spezielle Gruppen*

Es sei

- $M := (id, d, d^3)$ eine Teilmenge von Z_6,
- $N := (id, d^2, d^4)$ eine Teilmenge von Z_6 und
- $4\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists_{t \in \mathbb{Z}}\ z = 4 \cdot t\}$.

Beweisen Sie:

a) $(M, \circ)$ ist keine Gruppe. *1 BE*

b) $(N, \circ)$ ist eine Gruppe. *3 BE*

c) $(4\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. *3 BE*

Hinweise: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(Z_6, \circ)$ ist eine Gruppe.

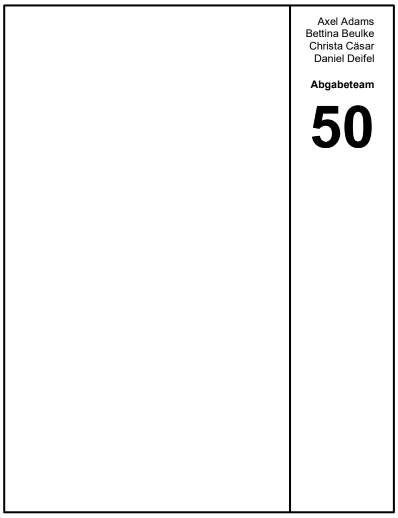
Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:	*25 BE*

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens

  Freitag, 17.06.2022, 10:00 Uhr

  im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch.
- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Abgabeteams** aus jeweils 4 Personen, die im gesamten Semester zusammenarbeiten. Schreiben Sie sich umgehend im **OLAT-Kurs** in ein Abgabeteam ein.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabeteams (im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften.



- Geben Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts ab. Benennen Sie diese Datei wie folgt:
  {Abgabenteamnummer}_Uebungsblatt_{Übungsblattnr}.pdf
  Ersetzen Sie die geschweiften Klammern mit Ihren jeweiligen Daten.
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse:
  https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie