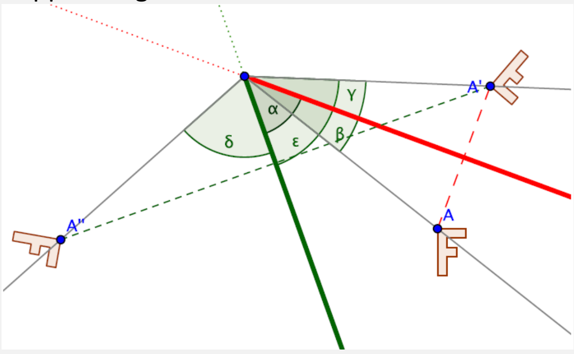
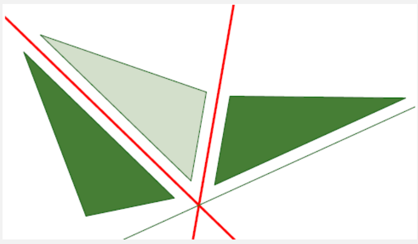
3. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. Drehwinkel bei einer Drehung aus zwei hintereinander ausgeführten Spiegelungen

Beweisen Sie, dass der Drehwinkel der Drehung, die aus zwei Spiegelungen entsteht, doppelt so groß ist wie der Winkel zwischen den beiden Spiegelachsen *6 BE*





Hinweise:

(1) Das linke Bild hilft Ihnen, die Winkelbeziehungen zu erkennen und für einen allgemeinen Beweis zu nutzen.

(2) Das rechte Bild stellt die Grundidee prägnant dar. Können Sie es deuten?

(3) Sie können folgendes benutzen:

- Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen, bilden also Figuren der Ebene auf dazu Deckungsgleiche Figuren ab.
- Kongruenzabbildungen sind insbesondere winkeltreu, verändern also die Größe eines Winkels beim Abbilden nicht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(Vor.) Die beiden Geraden $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ schneiden sich im Punkt $\boldsymbol{S}$ unter dem Winkel α.

$$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{S}\} \qquad \wedge \qquad |\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})| = \alpha$$

Wir betrachten nun oBdA[1] einen Punkt $\boldsymbol{A}$, der, wie in der linken Abbildung, im Winkelfeld des Winkels α liegt. Dabei schließt die Gerade $\boldsymbol{SA}$ mit $\boldsymbol{a}$ den Winkel β ein.

$$|\angle(\boldsymbol{SA},\boldsymbol{a})| = \beta$$

(1) $\boldsymbol{A'}$ ist der Bildpunkt des Punktes $\boldsymbol{A}$ bei Spiegelung an der Geraden $\boldsymbol{a}$.

$$s_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A'}$$

(2) Da Achsenspiegelungen Kongruenzabbildungen sind, bilden sie u.a. Winkel auf gleichgroße Winkel ab. Deshalb gilt für die Winkelgröße des Winkels γ der von $\boldsymbol{a}$ und der Geraden $\boldsymbol{SA'}$ eingeschlossen wird:

$$\gamma = |\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{SA'})| = |\angle(\boldsymbol{SA},\boldsymbol{a})| = \beta$$

(3) Für den Winkel ε zwischen $\boldsymbol{SA'}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt:

$$\varepsilon = |\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{SA'})| = |\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})| + |\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{SA'})| = \alpha + \gamma \overset{(2)}{\triangleq} \alpha + \beta$$

(4) $\boldsymbol{A''}$ ist der Bildpunkt des Punktes $\boldsymbol{A'}$ bei Spiegelung an der Geraden $\boldsymbol{b}$.

$$s_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{A'}) = \boldsymbol{A''}$$

(5) Da Achsenspiegelungen Kongruenzabbildungen sind, bilden sie u.a. Winkel auf gleichgroße Winkel ab. Deshalb gilt für die Winkelgröße des Winkels δ der von der Geraden $\boldsymbol{SA''}$ und $\boldsymbol{b}$ eingeschlossen wird:

$$\delta = |\angle(\boldsymbol{SA''},\boldsymbol{b})| = |\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{SA'})| \overset{(3)}{\triangleq} \alpha + \beta$$

(6) Für den Winkel zwischen $\boldsymbol{SA''}$ und $\boldsymbol{SA'}$ folgt:

[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA). Wenn A nicht im Inneren des Winkels liegt, dann vertausche die Bezeichner für a und b oder drehe um 180°. Dann würde A im Inneren des Winkels liegen. Daher „oBdA“

$$|\angle(SA'', SA')| = |\angle(SA'', b)| + |\angle(b, SA')| \overset{(3),(5)}{\triangleq} \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta$$

(7) Für den Winkel zwischen SA'' und SA ergibt sich daraus:

$$|\angle(SA'', SA)| = |\angle(SA'', SA')| - |\angle(SA, SA')| \overset{(6),(Vor.),(2)}{\triangleq} (2\alpha + 2\beta) - 2\beta = 2\alpha$$

(8) Da es sich bei der Winkelgröße $|\angle(SA'', SA)|$ um die Winkelgröße handelt, um die man A drehen muss um A'' zu erhalten, folgt daraus die Behauptung.

2. *Achsenspiegelung an zueinander senkrechten Geraden*

Seien a und b sich schneidende Geraden.
Beweisen Sie:

$$\boldsymbol{a \perp b \Rightarrow s_a \circ s_b = s_b \circ s_a}$$

2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

Beweis:

Vor.: Sind a, b zwei Geraden, die sich im Punkt Z im rechten Winkel schneiden.
D.h. $a \cap b = \{Z\}$ und $|\angle(a, b)| = |\angle(b, a)| = 90°$.
(z.Z.: $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$)

Nach Aufgabe 1 gilt:

a) $s_a \circ s_b$ ist gleich einer Drehung mit Drehzentrum Z um einen Drehwinkel, welcher doppelt so groß ist wie der von den Geraden b und a eingeschlossene Winkel (nach Vor. $|\angle(b, a)| = 90°$). D.h.: $s_a \circ s_b = d_{Z,180°}$

b) $s_b \circ s_a$ ist gleich einer Drehung mit Drehzentrum Z um einen Drehwinkel, welcher doppelt so groß ist wie der von den Geraden a und b eingeschlossene Winkel (nach Vor. $|\angle(a, b)| = 90°$). D.h.: $s_b \circ s_a = d_{Z,180°}$

Insgesamt also: $s_a \circ s_b \overset{a)}{\triangleq} d_{Z,180°} \overset{b)}{\triangleq} s_b \circ s_a$

3. *Bedeutung von Termen und zulässige Umformungen*

Geben Sie jeweils an, was die folgenden Terme bedeuten und ob bzw. unter welchen Bedingungen die angegebenen Umformungen zulässig sind. Begründen Sie jeweils ihre Antworten.

Hinweis:

Sie können folgendes benutzen: $d_{Z,\beta} \circ d_{Z,\alpha} = d_{Z,\alpha+\beta}$

a) $\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 = \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_1 = \mathrm{s}_1 \circ (\mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_2) \circ \mathrm{s}_1$
$= \mathrm{s}_1 \circ id \circ \mathrm{s}_1 = \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_1 = \mathrm{id}$

2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a)

$$\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 \overset{i.}{\triangleq} \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_1 \overset{ii.}{\triangleq} \mathrm{s}_1 \circ (\mathrm{s}_2 \circ \mathrm{s}_2) \circ \mathrm{s}_1 \overset{iii.}{\triangleq} \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{s}_1 \overset{iv.}{\triangleq} \mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_1 \overset{iii.}{\triangleq} \mathrm{id}$$

Begründungen:

i. Unzulässige Umformung: Verkettung von Abbildungen ist nicht kommutativ.
ii. Assoziativität der Achsenspiegelung

iii. Das zweimalige Spiegeln an der gleichen Spiegelachse entspricht der identischen Abbildung, denn $s^{-1} = s$.

iv. Das Verketten einer Abbildung mit der identischen Abbildung ergibt wieder die Abbildung, dies ist sogar kommutativ, denn id ist bzgl $\circ$ das neutrale Element.

b) $s_1 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2 = (s_1 \circ s_2) \circ (s_1 \circ s_2) = (s_1 \circ s_2)^2 = \left(d_{Z,\alpha}\right)^2 = d_{Z,2\cdot\alpha}$ ***2 Be***

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b)

$$s_1 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2 \overset{ii.}{\triangleq} (s_1 \circ s_2) \circ (s_1 \circ s_2) \overset{v.}{\triangleq} (s_1 \circ s_2)^2 \overset{vi.}{\triangleq} \left(d_{z,\alpha}\right)^2 \overset{\text{Hinweis aus Aufgabe}}{\triangleq} d_{Z,2\cdot\alpha}$$

Weitere Begründungen:

v. Abkürzende Schreibweise.

vi. Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an sich schneidenden Achsen ist eine Drehung.

c) $s_1 \circ (s_1 \circ s_2) = (s_1 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s_2) = id \circ (s_1 \circ s_2) = s_1 \circ s_2$ ***2 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c)

$$s_1 \circ (s_1 \circ s_2) \overset{vii.}{\triangleq} (s_1 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s_2) \overset{iii.}{\triangleq} id \circ (s_1 \circ s_2) \overset{iv.}{\triangleq} s_1 \circ s_2$$

Weitere Begründungen:

vii. Diese Umformung ähnelt von der Struktur einem Distributivgesetz, dies ist nicht zulässig.

d) $d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} = d_{Z,\alpha}^4 = d_{Z,4\cdot\alpha} = id$ ***2 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 3d)

$$d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} \overset{v.}{\triangleq} d_{Z,\alpha}^4 \overset{\text{Hinweis aus Aufgabe}}{\triangleq} d_{Z,4\cdot\alpha} \overset{viii.}{\triangleq} id$$

Weitere Begründungen:

viii. Im Allgemeinen ist $d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha}$ <u>nicht</u> id.
Gegenbeispiel: $\alpha = 60° \Rightarrow d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\alpha} = d_{Z,60°} \circ d_{Z,60°} = d_{Z,2\cdot 60°} = d_{Z,120°} \neq id$

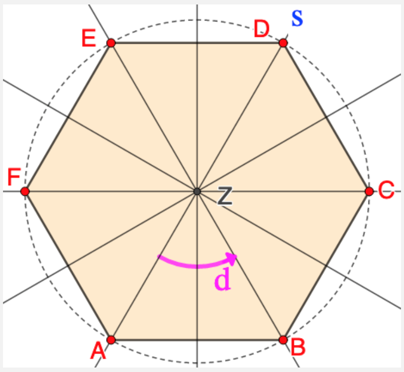
4. Deckabbildungen eines regulären Sechsecks

Die Eckpunkte eines regulären Sechsecks F_6 seien mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.

a) Geben Sie alle Deckabbildungen des regulären Sechsecks an und notieren Sie jeweils auch, welcher Eckpunkt des regulären Sechsecks dabei auf welchen Eckpunkt abgebildet wird. Gehen Sie dabei wie in folgendem Beispiel vor:

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix}$$

Falls sich Drehungen unter den Deckabbildungen befinden, notieren Sie bitte jeweils auch das zugehörige Drehzentrum Z und die Winkelgröße des Drehwinkels α im Gradmaß: $d_{Z,\alpha}$ **4BE**



b) Zeigen Sie, dass alle Deckabbildungen des regulären Sechsecks durch Verkettung $\circ$ aus einer geeigneten Drehung d und einer geeigneten Achsenspiegelung s erzeugt werden können. Dabei können d bzw. s ggf. mehrfach in der Verkettung vorkommen. Rechnen Sie jeweils nach, dass die von Ihnen angegebenen Verkettungen auch wirklich der jeweiligen Deckabbildung entsprechen. **5 BE**

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) und 4b) kombiniert

Die Deckabbildungen des regulären Sechsecks sind laut Vorlesung genau die folgenden:

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = s$$

(s_a bezeichne die Achsenspiegelung an der Geraden durch A und D)

$$id = d_{Z,0^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & B & C & D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = s \circ s = s^2$$

$$d_{Z,60^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} = d$$

$$d_{Z,120^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & D & E & F & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} = d \circ d = d^2$$

$$d_{Z,180^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & E & F & A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & D & E & F & A & B \end{pmatrix} = d \circ d^2 = d^3$$

$$d_{Z,240^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & A & B & C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & E & F & A & B & C \end{pmatrix} = d \circ d^3 = d^4$$

$$d_{Z,300^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & A & B & C & D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & A & B & C & D \end{pmatrix} = d \circ d^4 = d^5$$

$$s_g = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & A & F & E & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = d \circ s = ds$$

(s_g bezeichne die Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten von AB)

$$s_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & B & A & F & E & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & D & E & F & A & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = d^2 \circ s = d^2 s$$

(s_b bezeichne die Achsenspiegelung an der Geraden durch B und E)

$$s_h = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & C & B & A & F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & E & F & A & B & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = d^3 \circ s = d^3 s$$

(s_h bezeichne die Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten von BC)

$$s_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & D & C & B & A & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & A & B & C & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = d^4 \circ s = d^4 s$$

(s_c bezeichne die Achsenspiegelung an der Geraden durch C und F)

$$s_k = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & E & D & C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & A & B & C & D & E \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & F & E & D & C & B \end{pmatrix} = d^5 \circ s = d^5 s$$

(s_k bezeichne die Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten von CD)

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 25 BE