2. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. *Eigenschaften der Operationen $\oplus$ und $\otimes$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$*

Es seien $\oplus$ und $\otimes$ auf der Menge der ganzen Zahlen definiert als

$$a \oplus b := a^3 + b$$
$$a \otimes b := 4 \cdot a \cdot b$$

a) Welche Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen kommen als Ergebnisse heraus, wenn die Rechnung $a \otimes b$ mit beliebigen ganzen Zahlen a, b durchführt wird. Begründen Sie Ihr Ergebnis. ***2 BE***

b) In den ganzen Zahlen ist Null das neutrale Element der Addition, denn es gilt:

$$0 \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a\in\mathbb{Z}}\ a + 0 = 0 + a = a$$

Gibt es auch für die Rechenoperation $\oplus$ ein neutrales Element?
Falls ja, geben Sie das neutrale Element n konkret an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element von $\oplus$ ist. D.h. $n \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a\in\mathbb{Z}}\ a \oplus n = n \oplus a = a$
Falls nein, begründen Sie, warum es kein neutrales Element zur Operation $\oplus$ geben kann. ***2 BE***

c) In den ganzen Zahlen ist Eins das neutrale Element der Multiplikation, denn es gilt:

$$1 \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a\in\mathbb{Z}}\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4}$ das neutrale Element von $\otimes$ ist, falls die Operation $\otimes$ auf die rationalen Zahlen ausgeweitet wird (d.h. $\forall_{a,b\in\mathbb{Q}}\ a \otimes b := 4 \cdot a \cdot b$).
Begründen Sie, warum eine Ausweitung auf die rationalen Zahlen notwendig ist. ***2 BE***

d) In den rationalen Zahlen gibt es für alle Zahlen bis auf die Null ein inverses Element bzgl. der Multiplikation $\cdot$, denn es gilt:

$$\forall_{a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}}\ \exists_{a^{-1}\in\mathbb{Q}}\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Zeigen Sie, dass es auch bzgl. $\otimes$ in der Version von Aufgabenteil ***c)*** für jedes von Null verschiedene $a \in \mathbb{Q}$ ein inverses Element gibt.
Tipp: Versuchen Sie es mit folgendem Element: $c^{-1} = \frac{b \cdot sign(a)}{16 \cdot |a|}$ wobei $c = \frac{a}{b}$ ***2 BE***

e) Die fortgesetzte Multiplikation führt zum Potenzieren, so gilt etwa:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

Zu welcher Operation führt die fortgesetzte Ausführung der Operation $\otimes$?

$$\underbrace{a \otimes a \otimes \ldots \otimes a \otimes a}_{n \text{ Faktoren}} = ?$$

Geben Sie die Operation wie oben begonnen an und beweisen Sie es durch vollständige Induktion. ***4 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

a) Welche Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen kommen als Ergebnisse heraus, wenn die Rechnung $a \otimes b$ mit beliebigen ganzen Zahlen *a*, *b* durchführt wird. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Die Menge der Ergebnisse von $\otimes$ entspricht genau der Menge der (positiven wie negativen) Vielfachen von 4.
Begründung: $a \otimes b := 4 \cdot a \cdot b$
$a \otimes b$ ist also für jedes $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ ein Vielfaches von 4.
Andererseits sei m ein Vielfaches von 4. Dann gilt $m = 4 \cdot k = 4 \cdot k \cdot 1 = k \otimes 1$ also lässt sich jedes Vielfache von 4 mithilfe von $\otimes$ darstellen.

b) … Gibt es auch für die Rechenoperation $\oplus$ ein neutrales Element?
Falls ja, geben Sie das neutrale Element n konkret an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element von $\oplus$ ist.
Falls nein, begründen Sie, warum es kein neutrales Element zur Operation $\oplus$ geben kann.

Es gibt kein solches „neutrale Element" für $\oplus$.

Angenommen es gäbe ein neutrales Element n für $\oplus$. Dann würde für dieses gelten:

$a \oplus n = a$ für jedes beliebige $a \in \mathbb{Z}$

Sei beispielsweise $a = 2$. Dann würde gelten $a \oplus n = a^3 + n \quad = a$

Also $2^3 + n \quad = 2$.

Folglich müsste n gleich -6 sein. Das neutrale Element ist eindeutig. Daher müsste -6 auch für $a = 1$ die Gleichung $1^3 + n \quad = 1$ erfüllen. Es gilt aber $1 + (-6) = -5$. -5 ist nicht 1 und daher kann es kein neutrales Element für $\oplus$ geben.

c) … Zeigen Sie, dass 1/4 das neutrale Element von $\otimes$ ist, falls die Operation $\otimes$ auf die rationalen Zahlen ausgeweitet wird.
Begründen Sie, warum eine Ausweitung auf die rationalen Zahlen notwendig ist.

Die Existenz des neutralen Elements $\frac{1}{4}$ bezüglich $(\mathbb{Q}, \otimes)$ kann durch Nachprüfen des folgenden Kriteriums gezeigt werden:

$$\frac{1}{4} \in \mathbb{Q} \wedge \forall_{a \in \mathbb{Q}}\ a \otimes \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \otimes a = a$$

Zunächst gilt offensichtlich: $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$. $\frac{1}{6}$ ist eine rationale Zahl (Nenner in $\mathbb{N}_{>0}$, Zähler in $\mathbb{Z}$).

Sei $a \in \mathbb{Q}$ beliebig (aber fest). Dann gilt:

$a \otimes \frac{1}{4}$	(mittels Definition von $\otimes$)
$= 4 \cdot a \cdot \frac{1}{4}$	(mittels Kommutativgesetz, Assoziativgesetz bezüglich $\cdot$)
$= \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot a$	(mittels Regeln der Bruchrechnung)
$= 1 \cdot a$	(mittels 1 neutrales Element in $(\mathbb{Z}, \cdot)$)
$= a$	

Außerdem gilt

$\frac{1}{4} \otimes a$	(mittels Definition von $\otimes$)
$= 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot a$	(mittels Assoziativgesetz bezüglich $\cdot$)
$= \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot a$	(mittels Regeln der Bruchrechnung)
$= 1 \cdot a$	(mittels 1 neutrales Element in $(\mathbb{Z}, \cdot)$)
$= a$	

Damit ist $\frac{1}{4}$ ein neutrales Element bezüglich $\otimes$.

Die Ausweitung auf die rationalen Zahlen ist notwendig, denn $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ aber $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ und das neutrale Element muss laut Definition immer ein Element der Menge sein, auf der die Verknüpfung definiert ist.

d) … Zeigen Sie, dass es auch bzgl. $\otimes$ in der Version von Aufgabenteil ***c)*** für jedes $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ein inverses Element gibt.

Es wird gezeigt:

Das Inverse von beliebigem $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\frac{b \cdot \operatorname{sign}(a)}{16 \cdot |a|}$.

Dabei ist $\operatorname{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ die Signum- bzw. Vorzeichenfunktion.

Sei $c \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ beliebig. c lässt sich folglich schreiben als $c = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sei c^{-1} nun definiert durch $\frac{b \cdot \operatorname{sign(a)}}{16 \cdot |\mathrm{a}|}$

Es wird nun überprüft, ob c^{-1} tatsächlich, wie das Zeichen $\quad^{-1}$ suggeriert ein zu c inverses Element ist.

$c^{-1} \in \mathbb{Q}$,

denn für den „Zähler“ gilt $b \cdot \operatorname{sign}(a) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
da $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\operatorname{sign}(a) \in \{-1,1\}$, da $a \neq 0,\ a \in \mathbb{Z}$

und für den „Nenner“ gilt $16 \cdot |a| \in \mathbb{N}$

Außerdem ist deshalb $c^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$c \otimes c^{-1}$

$= \frac{a}{b} \otimes \frac{b \cdot \operatorname{sign}(a)}{16 \cdot |a|}$ (Definition $\otimes$, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz bezüglich $\cdot$)

$= 4 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b \cdot \operatorname{sign}(a)}{16 \cdot |a|}$ (Bruchrechnung)

$= \frac{4 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sign}(a)}{b \cdot 16 \cdot |a|}$ (Kürzen b ($b > 0$), Kürzen 6)

$= \frac{1 \cdot a \cdot 1 \cdot \operatorname{sign}(a)}{1 \cdot 4 \cdot |a|}$ (1 neutral in $(\mathbb{Q},\cdot)$)

$= \frac{1 \cdot a \cdot \operatorname{sign}(a)}{4 \cdot |a|}$ (Bruchrechnung, KG)

$= \frac{a \cdot \operatorname{sign}(a)}{|a|} \cdot \frac{1}{4}$ ($a \cdot \operatorname{sign(a)} = |\mathrm{a}|$)

$= \frac{|a|}{|a|} \cdot \frac{1}{4}$ (Kürzen $|a|$ ($a \neq 0$))

$= 1 \cdot \frac{1}{4}$ (1 neutral in $(\mathbb{Q},\cdot)$)

$= \frac{1}{4}$ (neutrales Element bezüglich $(\mathbb{Q},\otimes)$)

Analog zeigt man: $c^{-1} \otimes c = \frac{1}{4}$

e) … Geben Sie die Operation wie oben begonnen an und beweisen Sie es durch vollständige Induktion.

Die fortgesetzte Ausführung der Operation $\otimes$ führt zu $4^{n-1} \cdot a^n$ $\quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$.

$$\underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{n \text{ Faktoren}} = 4^{n-1} \cdot a^n$$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

Beh: $\quad \forall_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} \ \underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{n \text{ Faktoren}} = 4^{n-1} \cdot a^n$

IA: $(n = 2)$

Für $n = 2$ gilt:

$$a \otimes a = 4 \cdot a \cdot a = 4 \cdot a^2 = 4^1 \cdot a^2 = 4^{2-1} \cdot a^2 = 4^{n-1} \cdot a^n$$

IS:(Induktionsschritt)

IV: Für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ $gelte$: $a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a = 4^{n-1} \cdot a^n$.

Zu zeigen bleibt die Induktionsbehauptung:

$$\underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a \otimes a}_{n+1 \text{ Faktoren}} = 4^{(n+1)-1} \cdot a^{n+1}$$

Es gilt:

$\underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a \otimes a}_{n+1 \text{ Faktoren}}$ $\quad$ $(\otimes \ ist\ assoziativ)$

$\underbrace{(a \otimes a \otimes a \otimes \cdots \otimes a)}_{n \text{ Faktoren}} \otimes a$ $\quad$ (IV)

$= 4^{n-1} \cdot a^n \otimes a = 4 \cdot (4^{n-1} \cdot a^n) \cdot a$
(Definition $\otimes$, Kommutativ- & Assoziativgesetz)

$= 4 \cdot (4^{n-1} \cdot a^n) \cdot a$ $\quad$ ($\cdot$ ist assoziativ)

$= 4 \cdot 4^{n-1} \cdot a^n \cdot a$ (Potenzregeln)

$= (4^1 \cdot 4^{n-1}) \cdot (a^n \cdot a^1)$ $\quad$ (Potenzregeln)

$= 4^{1+n-1} \cdot a^{n+1}$ $\quad$ (Kommutativgesetz $+$)

$= 4^{(n+1)-1} \cdot a^{n+1}$

Abschließend betrachten wir zwei noch nicht beachtete Sonderfälle:

- Mit „a^0“ bezeichnet man normalerweise das sogenannte „Leere Produkt“, das gleich dem Einselement ist (das ist wichtig damit man Potenzrechenregeln für $\otimes$ einführen kann). Und tatsächlich: Setzt man in der Formel $n = 0$, so erhält man:
  $4^{n-1} \cdot a^n = 4^{-1} \cdot a^0 = \frac{1}{4}$ $\quad$ (Das ist das neutrale Element bzgl. $\otimes$.)
- „a^1“ bezeichnet normalerweise „a“ und tatsächlich: Setzt man in der Formel $n = 1$, so erhält man: $\quad 4^{n-1} \cdot a^n = 4^0 \cdot a^1 = a$

2. *Reste erkunden*

Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen entdecken schon Grundschulkinder Muster und Strukturen in den Additions- und Multiplikationstafeln. Beispielsweise haben bestimmte Produkte dieselben Endziffern. Dies gilt z. B. für $6 \cdot 3$ (Endziffer 8) und $7 \cdot 4$ (Endziffer 8) bzw. $7 \cdot 2$ (Endziffer 4) und $8 \cdot 3$ (Endziffer 4). Dass die Untersuchung von Endziffern mathematische Strukturen aufdeckt, liegt an unserem Zahlensystem: Die Endziffern einer Zahl sind deren Einer, die Ziffern davor alle Vielfache von 10. Damit ist die Endziffer gerade der verbleibende Rest, wenn man eine Zahl durch 10 teilt. Man kann sich auch für die Reste bei anderen Divisionen interessieren, denn die Zehn als Basis unserer Ziffernschreibweise ist eine historisch willkürliche Wahl, das Zahlensystem der Babylonier hatte z. B. die sechzig als Basis.

Hier ist eine Multiplikationstafel abgebildet, bei der die Einträge in den Zellen jeweils die Reste der Produkte des Zeilen- und Spaltenkopfs beim Teilen durch vier sind. So ergibt sich in der Multiplikationstafel z. B. der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 2 und Zeilenkopf 1 wie folgt:

$$(1 \cdot 2) : 4 = 2 : 4 = 0 \; Rest \; 2$$

Dieser Rest 2 steht dann als Eintrag in der Zelle. Entsprechend ergibt sich der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 7 und Zeilenkopf 3 aus dem Rest der folgenden Rechnung:

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3	0	3	2	1	0	3	2	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	3	0	1	2	3	0
6	0	2	0	2	0	2	0	2	0
7	0	3	2	1	0	3	2	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$(3 \cdot 7) : 4 = 21 : 4 = 5 \; Rest \; 1 \; (21 = 5 \cdot 4 + 1)$$

a) Fertigen Sie eine analoge Multiplikationstafel für die Division der Zahlen von 0 bis 12 mit Rest durch 6 an. ***2 BE***

b) Beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 kann es nur die Reste $0, 1, 2, 3$ und 4 geben.
Falls Sie sich fragen, wie das gemeint ist, dann machen Sie sich Folgendes klar:

$$14 : 5 = 2 \text{ Rest } 4, \text{ weil } 14 = 2 \cdot 5 + 4 \text{ ist.}$$

Stellen Sie diese Tatsache auf geschickte Art und Weise als Punktmuster dar und begründen Sie damit, dass es beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 nur die obengenannten Reste geben kann. ***2 BE***

c) Die Zahlen 3 und 27 lassen beim Teilen durch 4 denselben Rest, denn es gilt:

$$3 = 0 \cdot 4 + 3$$
$$27 = 6 \cdot 4 + 3$$

Man sagt in so einem Fall auch: „3 kongruent 27 modulo 4."
Eine Kurzschreibweise dafür ist: $3 \equiv 27 \bmod 4$

Sortieren Sie die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 34, 35$ passend in folgende Tabelle:

$0 \bmod 4$	
$1 \bmod 4$	
$2 \bmod 4$	
$3 \bmod 4$	

3 BE

d) Sortieren Sie auch die Zahlen $-35, -34, \ldots, -2, -1$ passend in folgende Tabelle und begründen Sie Ihre Zuordnung exemplarisch für je einen Zahlenwert in jeder Zeile:

$0 \bmod 6$	
$1 \bmod 6$	
$2 \bmod 6$	
$3 \bmod 6$	

3 BE

e) Welche der nebenstehenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

$21 \equiv 4 \bmod 3$
$21 \equiv 9 \bmod 3$
$21 \equiv 3 \bmod 4$
$21 \equiv 41 \bmod 4$

2,5 BE

$21 \equiv 7 \bmod 6$
$21 \equiv 3 \bmod 2$

f) Welche Ziffer kann man anstelle des „X“ schreiben, sodass die Kongruenz gilt:

$$5X \equiv 4 \bmod X$$

1 BE

g) Vervollständigen Sie folgenden Satz:
Für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a \equiv b \bmod 2$ genau dann, wenn a und b beide _________ oder beide _________ sind.

0,5 BE

h) Begründen Sie, warum zwei Zahlen a und b genau dann kongruent modulo 4 sind, wenn deren Differenz durch 4 teilbar ist.

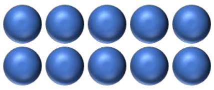
4 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

a) Fertigen Sie eine analoge Multiplikationstafel für die Division mit Rest durch 6 an. In den Zeilen- und Spaltenköpfen verwenden Sie bitte die Zahlen 0, 1, 2, …, 12.

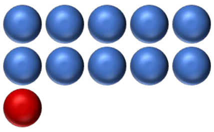
$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0
2	0	2	4	0	2	4	0	2	4	0	2	4	0
3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0
4	0	4	2	0	4	2	0	4	2	0	4	2	0
5	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0
8	0	2	4	0	2	4	0	2	4	0	2	4	0
9	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0
10	0	4	2	0	4	2	0	4	2	0	4	2	0
11	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b) Beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 kann es nur die Reste 0, 1, 2, 3, 4 geben.
… Stellen Sie diese Tatsache auf geschickte Art und Weise als Punktmuster dar und begründen Sie damit, dass es beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 nur die obengenannten Reste geben kann.



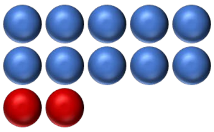
$10 = 2 \cdot 5 + 0$

Rest **0**



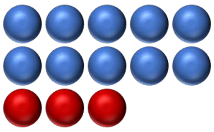
$11 = 2 \cdot 5 + 1$

Rest **1**



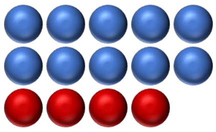
$12 = 2 \cdot 5 + 2$

Rest **2**



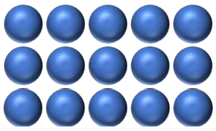
$13 = 2 \cdot 5 + 3$

Rest **3**



$14 = 2 \cdot 5 + 4$

Rest **4**



$15 = 3 \cdot 5 + 0$

Rest **0**

c) Sortieren Sie die Zahlen 0, 1, 2, …, 34, 35 passend in folgende Tabelle

$0 \ mod \ 4$	$0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32$
$1 \ mod \ 4$	$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33$
$2 \ mod \ 4$	$2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34$
$3 \ mod \ 4$	$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35$

d) Sortieren Sie auch die Zahlen $-35, -34, \ldots, -2, -1$ passend in folgende Tabelle und begründen Sie Ihre Zuordnung exemplarisch für je einen Zahlenwert in jeder Zeile:

$0 \ mod \ 6$	$-6, -12, -18, -24, -30$	$-6 \equiv 0 \ mod \ 6$ da $-6 = (-1) \cdot 6 + 0$
$1 \ mod \ 6$	$-5, -11, -17, -23, -29$	$-5 \equiv 1 \ mod \ 6$ da $-5 = (-1) \cdot 6 + 1$
$2 \ mod \ 6$	$-4, -10, -16, -22, -28$	$-4 \equiv 2 \ mod \ 6$ da $-4 = (-1) \cdot 6 + 2$
$3 \ mod \ 6$	$-3, -9, -15, -21, -27, -33$	$-3 \equiv 3 \ mod \ 6$ da $-3 = (-1) \cdot 6 + 3$
$4 \ mod \ 6$	$-2, -8, -14, -20, -26, -32$	$-2 \equiv 4 \ mod \ 6$ da $-2 = (-1) \cdot 6 + 4$
$5 \ mod \ 6$	$-1, -7, -13, -19, -25, -31$	$-1 \equiv 5 \ mod \ 6$ da $-1 = (-1) \cdot 6 + 5$

e) Welche der nebenstehenden Aussagen sind richtig?
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

$21 \equiv 4 \; mod \; 3$
$21 = 7 \cdot 3 + 0$ und $4 = 1 \cdot 3 + 1$ also falsch.

$21 \equiv 9 \; mod \; 3$
$21 = 7 \cdot 3 + 0$ und $9 = 3 \cdot 3 + 0$ also wahr.

$21 \equiv 3 \; mod \; 4$
$21 = 5 \cdot 4 + 1$ und $3 = 0 \cdot 4 + 3$ also falsch.

$21 \equiv 41 \; mod \; 4$
$21 = 5 \cdot 4 + 1$ und $41 = 10 \cdot 4 + 1$ also wahr.

$21 \equiv 7 \; mod \; 6$
$21 = 3 \cdot 6 + 3$ und $7 = 1 \cdot 6 + 1$ also falsch.

$21 \equiv 3 \; mod \; 2$
$21 = 10 \cdot 2 + 1$ und $3 = 1 \cdot 2 + 1$ also falsch.

f) Welche Ziffer kann man anstelle des „X“ schreiben, sodass die Kongruenz gilt: $5X \equiv 4 \text{ mod } X$
$4 \; mod \; 0$ ist nicht definiert

$4 \; mod \; 1$:
$4 = 4 \cdot 1 + 0$, d.h. 4 ist kongruent zu $0 \; mod \; 1$, wie auch jede andere ganze Zahl: $51 = 51 \cdot 1 + 0$, also ist auch 51 kongruent zu $0 \; mod \; 1$ und damit 1 eine geeignete Wahl für X

$4 \; mod \; 2$:
$4 = 2 \cdot 2 + 0$ und zugleich $52 = 26 \cdot 2 + 0$ also ist 52 kongruent zu $4 \; mod \; 2$. Damit ist 2 eine geeignete Wahl für X

$4 \; mod \; 3$:
$4 = 1 \cdot 3 + 1$ und zugleich $53 = 17 \cdot 3 + 2$. Damit ist 3 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 4$:
$4 = 4 \cdot 1 + 0$ und zugleich $54 = 13 \cdot 4 + 2$. Damit ist 4 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 5$:
55 hinterlässt keinen Rest bei Division durch 5 und $4 = 0 \cdot 5 + 4$. Also ist 5 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 6$:
$56 = 9 \cdot 6 + 2$ und $4 = 0 \cdot 6 + 4$. Also ist 6 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 7$:
$57 = 8 \cdot 7 + 1$ und $4 = 0 \cdot 7 + 4$. Also ist 7 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 8$:
$58 = 7 \cdot 8 + 2$ und $4 = 0 \cdot 8 + 4$. Also ist 8 keine geeignete Wahl für X.

$4 \; mod \; 9$:
$59 = 6 \cdot 9 + 5$ und $4 = 0 \cdot 9 + 4$. Also ist 9 keine geeignete Wahl für X.

g) Vervollständigen Sie folgenden Satz:
Für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a \equiv b \; mod \; 2$ genau dann,
wenn a und b beide __________ oder beide __________ sind.

Für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a \equiv b \; mod \; 2$ genau dann, wenn a und b beide gerade oder beide ungerade sind

h) Begründen Sie, warum zwei Zahlen a und b genau dann kongruent modulo 4 sind, wenn deren Differenz durch 4 teilbar ist.

Wir zeigen die Aussage in zwei Teilen. Wir zeigen zunächst die Aussage:

1. Ist die Differenz zweier ganzer Zahlen durch 4 teilbar, so sind die zwei Zahlen kongruent modulo 4.

Danach zweigen wir die Aussage:

2. Sind zwei Zahlen kongruent modulo 4, so ist deren Differenz durch 4 teilbar.

Wenn wir 1. und 2. zeigen konnten, haben wir die Aussage g) gezeigt.

Zu 1.

Ist die Differenz zweier ganzer Zahlen a und b durch 4 teilbar, dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit

$$a - b = 4z$$

Umstellen ergibt:

$$a = b + 4z$$

Zu b kommen somit nur Vielfache von 4 dazu bzw. werden weggenommen. Das sind dann immer eine gewisse Anzahl voller Viererreihen.
Am Rest, der an der nicht vollen Viererreihe gesehen werden kann, falls er von Null verschieden ist, ändert sich dadurch nichts. Somit müssen a und b bei Division durch 4 denselben Rest haben und sind somit kongruent modulo 4.

Zu 2.

Gilt umgekehrt $a \equiv b \; mod \; 4$, dann lassen a und b bei Division durch 4 den gleichen Rest r mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

Es gilt dann: $a = q_1 \cdot 4 + r$ und $b = q_2 \cdot 4 + r$ mit eindeutig bestimmten $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$.
Damit folgt: $a - b = q_1 \cdot 4 + r - (q_2 \cdot 4 + r) = (q_1 - q_2) \cdot 4 + r - r = (q_1 - q_2) \cdot 4$.
Da $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ folgt $(q_1 - q_2) \in \mathbb{Z}$ und somit ist $a - b$ ein Vielfaches ($(q_1 - q_2)$-faches) von 4.