2. Übungsblatt

1. *Eigenschaften der Operationen $\oplus$ und $\otimes$ in $\mathbb{N}$*

In Aufgabe 2 auf dem 1. Übungsblatt haben wir uns mit folgenden Rechenoperationen auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auseinandergesetzt:

$$a \oplus b \coloneqq 2 \cdot (a + b)$$
$$a \otimes b \coloneqq 2 \cdot a \cdot b$$

a) Welche Zahlen aus der Menge der natürlichen Zahlen, können als Ergebnisse herauskommen, wenn man die Rechnung $a \oplus b$ bzw. $a \otimes b$ mit beliebigen natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ durchführt. Begründen Sie Ihr Ergebnis. ***2 BE***

b) Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition, denn es gilt:

$$\forall_{a,b\in\mathbb{N}}\ a + b - b = a$$

Gibt es auch für die Rechenoperation $\oplus$ eine Umkehroperation $\ominus$?
Falls ja, geben Sie eine solche Umkehroperation an und zeigen Sie, dass sie die Operation $\oplus$ umkehrt, dass also gilt: $\forall_{a,b\in\mathbb{N}}\ a \oplus b \ominus b = a$
Falls nein, begründen Sie, warum es keine derartige Umkehroperation zur Operation $\oplus$ geben kann. ***2 BE***

c) Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, denn es gilt:

$$\forall_{a,b\in\mathbb{N}}\ a \cdot b : b = a$$

Gibt es auch für die Rechenoperation $\otimes$ eine Umkehroperation $\oslash$?
Falls ja, geben Sie eine solche Umkehroperation an und zeigen Sie, dass sie die Operation $\otimes$ umkehrt, dass also gilt: $\forall_{a,b\in\mathbb{N}}\ a \otimes b \oslash b = a$
Falls nein, begründen Sie, warum es keine derartige Umkehroperation zur Operation $\otimes$ geben kann. ***2 BE***

d) Die fortgesetzte Multiplikation führt zum Potenzieren, so gilt etwa:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n\ \text{Faktoren}} = a^n$$

Zu welcher Operation führt die fortgesetzte Ausführung der Operation $\otimes$?

$$\underbrace{a \otimes a \otimes \ldots \otimes a \otimes a}_{n\ \text{Faktoren}} = ?$$

Geben Sie die Operation wie oben begonnen an, erläutern Sie, wie Sie sich das erarbeitet haben und beweisen Sie es durch vollständige Induktion. ***4 BE***

2. *Reste erkunden*

Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen entdecken schon Grundschulkinder Muster und Strukturen in den Additions- und Multiplikationstafeln. Beispielsweise haben bestimmte Produkte dieselben Endziffern. Dies gilt z. B. für $6 \cdot 3$ und $7 \cdot 4$ bzw. $7 \cdot 2$ und $8 \cdot 3$. Dass die Untersuchung von Endziffern mathematische Strukturen aufdeckt, liegt an unserem Zahlensystem: Die Endziffern einer Zahl sind deren Einer, die Ziffern davor alle Vielfache von 10. Damit ist die Endziffer gerade der verbleibende Rest, wenn man eine Zahl durch 10 teilt. Man kann sich auch für die Reste bei anderen Divisionen interessieren, denn die Zehn als Basis unserer Ziffernschreibweise ist eine historisch willkürliche Wahl, das Zahlensystem der Babylonier hatte z. B. die sechzig als Basis.
Hier ist eine Multiplikationstafel abgebildet, bei der die Einträge in den Zellen jeweils die Reste der Produkte des Zeilen- und Spaltenkopfs beim Teilen durch vier sind. So ergibt sich in der Multiplikationstafel z. B. der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 2 und Zeilenkopf 1 wie folgt:

$$(1 \cdot 2) : 4 = 2 : 4 = 0\ Rest\ 2$$

Dieser Rest 2 steht dann als Eintrag in der Zelle. Entsprechend ergibt sich der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 9 und Zeilenkopf 2 aus dem Rest der folgenden Rechnung:

$$(2 \cdot 9) : 4 = 18 : 4 = 4\ Rest\ 2$$

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3	0	3	2	1	0	3	2	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	3	0	1	2	3	0
6	0	2	0	2	0	2	0	2	0
7	0	3	2	1	0	3	2	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a) Beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 4 kann es nur die Reste $0, 1, 2$ und 3 geben.

Falls Sie sich fragen, wie das gemeint ist, dann machen Sie sich folgendes klar:

$9 : 4 = 2$ Rest 1, weil $9 = 2 \cdot 4 + 1$ ist.

Stellen Sie diese Tatsache auf geschickte Art und Weise als Punktmuster dar und begründen Sie damit, dass es beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 4 nur die Reste $0, 1, 2$ und 3 geben kann. ***2 BE***

b) Die Zahlen 2 und 18 lassen beim Teilen durch 4 denselben Rest, denn es gilt:

$$2 : 4 = 0 \; Rest \; 2$$
$$18 : 4 = 4 \; Rest \; 2$$

Man sagt in so einem Fall auch: „2 und 18 sind identisch modulo 4.“
Eine Kurzschreibweise dafür ist: $2 \equiv 18 \bmod 4$

Sortieren Sie die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 22, 23$ passend in folgende Tabelle:

$0 \bmod 4$	
$1 \bmod 4$	
$2 \bmod 4$	
$3 \bmod 4$	

4 BE

c) Sortieren Sie auch die Zahlen $-24, -23, \ldots, -2, -1$ passend in folgende Tabelle und begründen Sie Ihre Zuordnung exemplarisch für je einen Zahlenwert in jeder Zeile:

$0 \bmod 4$	
$1 \bmod 4$	
$2 \bmod 4$	
$3 \bmod 4$	

4 BE

d) Welche der nebenstehenden Aussagen sind richtig?
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

$5 \equiv 11 \bmod 2$
$5 \equiv 11 \bmod 3$
$5 \equiv 11 \bmod 4$
$5 \equiv 11 \bmod 5$
$5 \equiv 11 \bmod 6$ ***2,5 BE***

e) Vervollständigen Sie folgenden Satz:
Für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a \equiv b \bmod 2$ genau dann,
wenn a und b beide __________ oder beide __________ sind. ***0,5 BE***

f) Die Reste-Multiplikationstafel modulo 4 weist eine Reihe von Mustern auf. In der Abbildung ist eine Symmetrieachse gestrichelt eingezeichnet. Bzgl. dieser Symmetrie gilt z. B.: $1 \cdot 6 \equiv 2 \cdot 7 \bmod 4$

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3	0	3	2	1	0	3	2	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	3	0	1	2	3	0
6	0	2	0	2	0	2	0	2	0
7	0	3	2	1	0	3	2	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Entsprechend der gelben Pfeile, die von $4 \cdot 4$ ausgehen, könnte man die Symmetrieeigenschaft bzgl. dieser Achse wie folgt schreiben:

$$(4 + m) \cdot (4 - n) \equiv (4 + n) \cdot (4 - m) \quad \bmod 4$$

Durch Berechnung und „Äquivalenzumformungen“ könnte man ableiten:

$$16 + 4 \cdot (m - n) - mn \equiv 16 - 4 \cdot (m - n) - mn \quad \bmod 4$$
$$4 \cdot (m - n) \equiv -4 \cdot (m - n) \quad \bmod 4$$
$$8 \cdot (m - n) \equiv 0 \quad \bmod 4$$

Es ist allerdings noch nicht ganz klar, ob man mit „$\equiv$“ und „mod 4“ so rechnen darf. Versuchen Sie ohne diese Vorgehensweise, ausschließlich mit Rechnungen im gewohnten Zahlenbereich die Beobachtung der angegebenen Symmetrie der Reste-Multiplikationstafel modulo 4 bzgl. der gestrichelten Achse zu beweisen. ***3 BE***

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 26 BE

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens
  Freitag, 16.05.2025, 10:00 Uhr
  im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch.
- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Gruppen** aus 4 Personen, die im ganzen Semester zusammenarbeiten.
- Bitte beschriften Sie Ihre Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer der (Abgabe-)Gruppe (im Beispiel Gruppe 50).
- Laden Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts in den Ordner Gruppe XX (im Beispiel Gruppe 50) im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch. Benennen Sie diese PDF-Datei wie folgt:
  Uebungsblatt_02_Gruppe_XX.pdf
  (im Beispiel: Uebungsblatt_02_Gruppe_50.pdf).
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse: **https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie**