2. Übungsblatt

1. Eigenschaften der Operationen $\oplus$ und $\otimes$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Es seien $\oplus$ und $\otimes$ auf der Menge der ganzen Zahlen definiert als

$$a \oplus b \coloneqq a^3 + b$$
$$a \otimes b \coloneqq 4 \cdot a \cdot b$$

a) Welche Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen kommen als Ergebnisse heraus, wenn die Rechnung $a \otimes b$ mit beliebigen ganzen Zahlen a, b durchgeführt wird? Begründen Sie Ihr Ergebnis. ***2 BE***

b) In den ganzen Zahlen ist Null das neutrale Element der Addition, denn es gilt:

$$0 \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a \in \mathbb{Z}}\ a + 0 = 0 + a = a$$

Gibt es auch für die Rechenoperation $\oplus$ ein neutrales Element?
Falls ja, geben Sie das neutrale Element n konkret an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element von $\oplus$ ist. D.h. $n \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a \in \mathbb{Z}}\ a \oplus n = n \oplus a = a$
Falls nein, begründen Sie, warum es kein neutrales Element zur Operation $\oplus$ geben kann. ***2 BE***

c) In den ganzen Zahlen ist Eins das neutrale Element der Multiplikation, denn es gilt:

$$1 \in \mathbb{Z} \wedge \forall_{a \in \mathbb{Z}}\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4}$ das neutrale Element von $\otimes$ ist, falls die Operation $\otimes$ auf die rationalen Zahlen ausgeweitet wird (d.h. $\forall_{a,b \in \mathbb{Q}}\ a \otimes b := 4 \cdot a \cdot b$).
Begründen Sie, warum eine Ausweitung auf die rationalen Zahlen notwendig ist. ***2 BE***

d) In den rationalen Zahlen gibt es für alle Zahlen bis auf die Null ein inverses Element bzgl. der Multiplikation $\cdot$, denn es gilt:

$$\forall_{c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}}\ \exists_{c^{-1} \in \mathbb{Q}}\ c \cdot c^{-1} = c^{-1} \cdot c = 1$$

Zeigen Sie, dass es auch bzgl. $\otimes$ in der Version von Aufgabenteil ***c)*** für jedes von Null verschiedene $c \in \mathbb{Q}$ ein inverses Element gibt.
Tipp: Versuchen Sie es mit folgendem Element: $c^{-1} = \frac{b \cdot sign(a)}{16 \cdot |a|}$ wobei $c = \frac{a}{b}$ ***2 BE***

e) Die fortgesetzte Multiplikation führt zum Potenzieren, so gilt etwa:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

Zu welcher Operation führt die fortgesetzte Ausführung der Operation $\otimes$?

$$\underbrace{a \otimes a \otimes \ldots \otimes a \otimes a}_{n \text{ Faktoren}} = ?$$

Geben Sie die Operation wie oben begonnen an und beweisen Sie es durch vollständige Induktion. ***4 BE***

2. *Reste erkunden*

Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen entdecken schon Grundschulkinder Muster und Strukturen in den Additions- und Multiplikationstafeln. Beispielsweise haben bestimmte Produkte dieselben Endziffern. Dies gilt z. B. für $6 \cdot 3$ (Endziffer 8) und $7 \cdot 4$ (Endziffer 8) bzw. $7 \cdot 2$ (Endziffer 4) und $8 \cdot 3$ (Endziffer 4). Dass die Untersuchung von Endziffern mathematische Strukturen aufdeckt, liegt an unserem Zahlensystem: Die Endziffern einer Zahl sind deren Einer, die Ziffern davor alle Vielfache von 10. Damit ist die Endziffer gerade der verbleibende Rest, wenn man eine Zahl durch 10 teilt. Man kann sich auch für die Reste bei anderen Divisionen interessieren, denn die Zehn als Basis unserer Ziffernschreibweise ist eine historisch willkürliche Wahl, das Zahlensystem der Babylonier hatte z. B. die sechzig als Basis.

Hier ist eine Multiplikationstafel abgebildet, bei der die Einträge in den Zellen jeweils die Reste der Produkte des Zeilen- und Spaltenkopfs beim Teilen durch vier sind. So ergibt sich in der Multiplikationstafel z. B. der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 2 und Zeilenkopf 1 wie folgt:

$$(1 \cdot 2) : 4 = 2 : 4 = 0 \; Rest \; 2$$

Dieser Rest 2 steht dann als Eintrag in der Zelle. Entsprechend ergibt sich der Eintrag in der Zelle mit Spaltenkopf 7 und Zeilenkopf 3 aus dem Rest der folgenden Rechnung:

$$(3 \cdot 7) : 4 = 21 : 4 = 5 \; Rest \; 1 \; (21 = 5 \cdot 4 + 1)$$

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3	0	3	2	1	0	3	2	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	3	0	1	2	3	0
6	0	2	0	2	0	2	0	2	0
7	0	3	2	1	0	3	2	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a) Fertigen Sie eine analoge Multiplikationstafel für die Division der Zahlen von 0 bis 12 mit Rest durch 6 an. ***2 BE***

b) Beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 kann es nur die Reste $0, 1, 2, 3$ und 4 geben.
Falls Sie sich fragen, wie das gemeint ist, dann machen Sie sich Folgendes klar:

$$14 : 5 = 2 \text{ Rest } 4, \text{ weil } 14 = 2 \cdot 5 + 4 \text{ ist.}$$

Stellen Sie diese Tatsache auf geschickte Art und Weise als Punktmuster dar und begründen Sie damit, dass es beim Teilen einer natürlichen Zahl durch 5 nur die obengenannten Reste geben kann. ***2 BE***

c) Die Zahlen 3 und 27 lassen beim Teilen durch 4 denselben Rest, denn es gilt:

$$3 = 0 \cdot 4 + 3$$
$$27 = 6 \cdot 4 + 3$$

Man sagt in so einem Fall auch: „3 kongruent 27 modulo 4.“
Eine Kurzschreibweise dafür ist: $3 \equiv 27 \bmod 4$

Sortieren Sie die Zahlen $0, 1, 2, \dots, 34, 35$ passend in folgende Tabelle:

$0 \bmod 4$	
$1 \bmod 4$	
$2 \bmod 4$	
$3 \bmod 4$	

3 BE

d) Sortieren Sie auch die Zahlen $-35, -34, \dots, -2, -1$ passend in folgende Tabelle und begründen Sie Ihre Zuordnung exemplarisch für je einen Zahlenwert in jeder Zeile:

$0 \bmod 6$	
$1 \bmod 6$	
$2 \bmod 6$	
$3 \bmod 6$	

3 BE

e) Welche der nebenstehenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

$21 \equiv 4 \bmod 3$
$21 \equiv 9 \bmod 3$
$21 \equiv 3 \bmod 4$
$21 \equiv 41 \bmod 4$
$21 \equiv 7 \bmod 6$
$21 \equiv 3 \bmod 2$ ***2,5 BE***

f) Welche Ziffer kann man anstelle des „X" schreiben, sodass die Kongruenz gilt:

$$5X \equiv 4 \bmod X$$ ***1 BE***

g) Vervollständigen Sie folgenden Satz:
Für zwei ganze Zahlen a und b gilt $a \equiv b \bmod 2$ genau dann, wenn a und b beide __________ oder beide __________ sind. ***0,5 BE***

h) Begründen Sie, warum zwei Zahlen a und b genau dann kongruent modulo 4 sind, wenn deren Differenz durch 4 teilbar ist. ***4 BE***

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 30 BE

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens
  Freitag, 20.05.2021, 10:00 Uhr
  im OLAT-Ordner [Abgaben Übungsblätter] hoch.
- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Abgabeteams** aus jeweils 4 Personen, die im gesamten Semester zusammenarbeiten. Schreiben Sie sich umgehend im [OLAT-Kurs] in ein Abgabeteam ein.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabeteams (im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften.
- Geben Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts ab.
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse:
  https://juergen-roth.de/lehre/algebra_zahlentheorie_4b