

0. Übungsblatt – Lösungshinweise

Präsenzübung

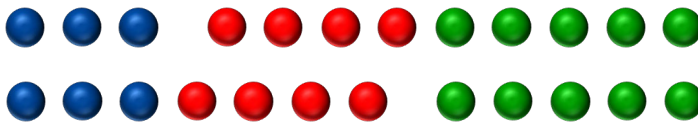
1. Begründung von Rechengesetzen auf der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N}

Begründen Sie folgende Rechengesetze auf der Menge der natürlichen Zahlen, indem Sie für die Variablen zunächst kleine Zahlenbeispiele einsetzen und dafür farbige Punktmuster legen und diese sprachlich erläutern. Gehen Sie auch darauf ein, inwiefern diese Beispiele paradigmatisch sind, also mit jeder Zahlenbelegung analog funktionieren.

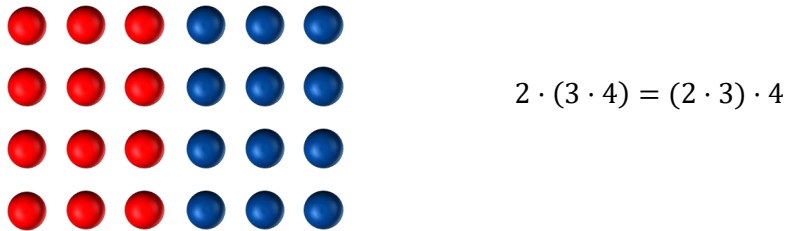
a) Assoziativität der Addition:	$a + (b + c) = (a + b) + c$	2 BE
b) Assoziativität der Multiplikation:	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	2 BE
c) Kommutativität der Addition:	$a + b = b + a$	2 BE
d) Kommutativität der Multiplikation:	$a \cdot b = b \cdot a$	2 BE
e) Distributivität:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

a) Assoziativität der Addition: $a + (b + c) = (a + b) + c$



b) Assoziativität der Multiplikation: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

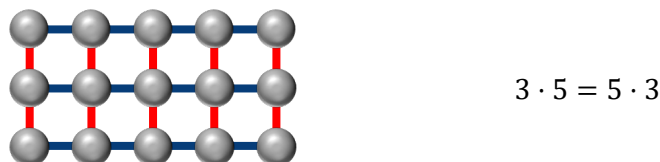


c) Kommutativität der Addition: $a + b = b + a$

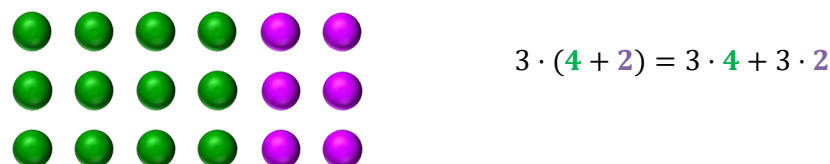


Ansehen von oben und von unten liefert jeweils eine Seite der Gleichung. Gleichheit: Es werden jeweils die Anzahl der Steine gezählt.

d) Kommutativität der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$



e) Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



2. Rechengesetze bzgl. der Abblitzation auf der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N}

Eine Schülerin hat sich folgende Rechenoperation, die Abblitzation, ausgedacht:

$$12 \hat{\wedge} 2 = (12 + 2) \cdot 2 = 28$$

↑ ↑ ↑
Abblitzant Abblitzator Ergebnis der Abblitzation

Untersuchen Sie, welche der folgenden Rechengesetze für die Abblitzation gelten:

- a) Ist die Abblitzation assoziativ? Gilt also: $a \hat{\wedge} (b \hat{\wedge} c) \stackrel{?}{=} (a \hat{\wedge} b) \hat{\wedge} c$ 2 BE
- b) Ist die Abblitzation kommutativ? Gilt also: $a \hat{\wedge} b \stackrel{?}{=} b \hat{\wedge} a$ 2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

a) $a \hat{\wedge} (b \hat{\wedge} c) = (a + (b \hat{\wedge} c)) \cdot (b \hat{\wedge} c) = (a + (b + c) \cdot c) \cdot ((b + c) \cdot c)$
 $= (a + bc + c^2) \cdot (bc + c^2)$
 $= abc + ac^2 + b^2c^2 + bc^3 + bc^3 + c^4$

$(a \hat{\wedge} b) \hat{\wedge} c = ((a + b) \cdot b) \hat{\wedge} c = (((a + b) \cdot b) + c) \cdot c = (ab + b^2 + c) \cdot c = abc + b^2c + c^2$
 $\Rightarrow a \hat{\wedge} (b \hat{\wedge} c) \neq (a \hat{\wedge} b) \hat{\wedge} c$, die Abblitzation ist also nicht assoziativ.

b) $a \hat{\wedge} b = (a + b) \cdot b = ab + b^2$
 $b \hat{\wedge} a = (b + a) \cdot a = ab + a^2$
 $\Rightarrow a \hat{\wedge} b \neq b \hat{\wedge} a$, die Abblitzation ist also nicht kommutativ.

3. Verknüpfungen „und“ (\wedge) sowie „oder“ (\vee)

Untersuchen Sie die Verknüpfungen „und“ (\wedge) sowie „oder“ (\vee). Die zu verknüpfenden Objekte sind die beiden Wahrheitswerte „f“ (falsch) und „w“ (wahr). Um zu sagen, welchen Wahrheitswert der Ausdruck $(A \vee B)$ („A oder B“) hat, genügt es, die beiden Wahrheitswerte von A und B zu kennen.

a) Füllen Sie die beiden Verknüpfungstabellen aus:

v	f	w
f		
w		

\wedge	f	w
f		
w		

2 BE

b) Vergleichen Sie die beiden Verknüpfungstabellen mit denen anderer binärer Verknüpfungen. Welche haben eine ähnliche oder sogar identische Struktur?

2 BE

c) Sind die Verknüpfungen „und“ (\wedge) sowie „oder“ (\vee) distributiv? Gelten folgende Distributivitäten?

$$(A \vee B) \wedge C \stackrel{?}{=} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \stackrel{?}{=} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Prüfen Sie, ob die Distributivitäten stimmen, indem Sie alle möglichen Wahrheitswerte „f“ und „w“ für die Aussagen A, B und C annehmen und dann das Ergebnis auf der Basis der Verknüpfungstabellen ausrechnen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

a)

v	f	w
f	f	w
w	w	w

\wedge	f	w
f	f	f
w	f	w

b) Gerade und ungerade Zahlen

+	g	u	·	g	u
g	<i>g</i>	<i>u</i>	g	<i>g</i>	<i>g</i>
u	<i>u</i>	<i>g</i>	u	<i>g</i>	<i>u</i>

b) Distributivitäten

A	B	C	A ∨ B	(A ∨ B) ∧ C	A ∧ C	B ∧ C	(A ∧ C) ∨ (B ∧ C)
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f	f
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

A	B	C	B ∨ C	A ∧ (B ∨ C)	A ∧ B	A ∧ C	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

22 BE