Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Jürgen Roth

# Grundlagen der Algebra und elem. Zahlentheorie

## Modul 4b: Grundlagen der Mathematik C

## Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

Jürgen Roth

# Kapitel 2: Strukturen geometrischer Symmetrien

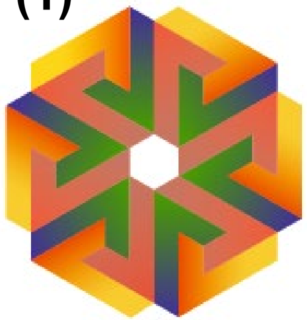
## Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

## Kapitel 2: Strukturen geom. Symmetrien

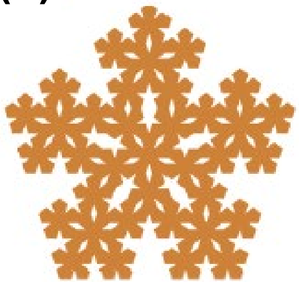
2.1 Deckabbildungen von Figuren – Gruppen

2.2 Symmetrien sortieren – Untergruppen

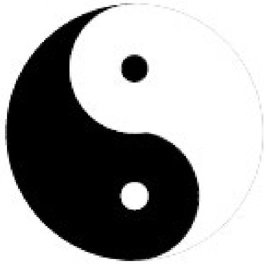
(1)



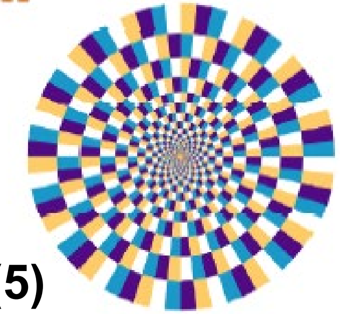
(2)



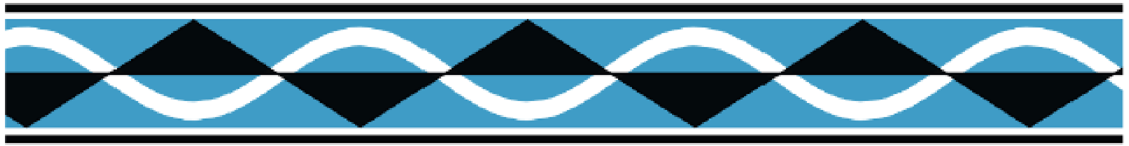
(3)



(4)



(5)



(6)

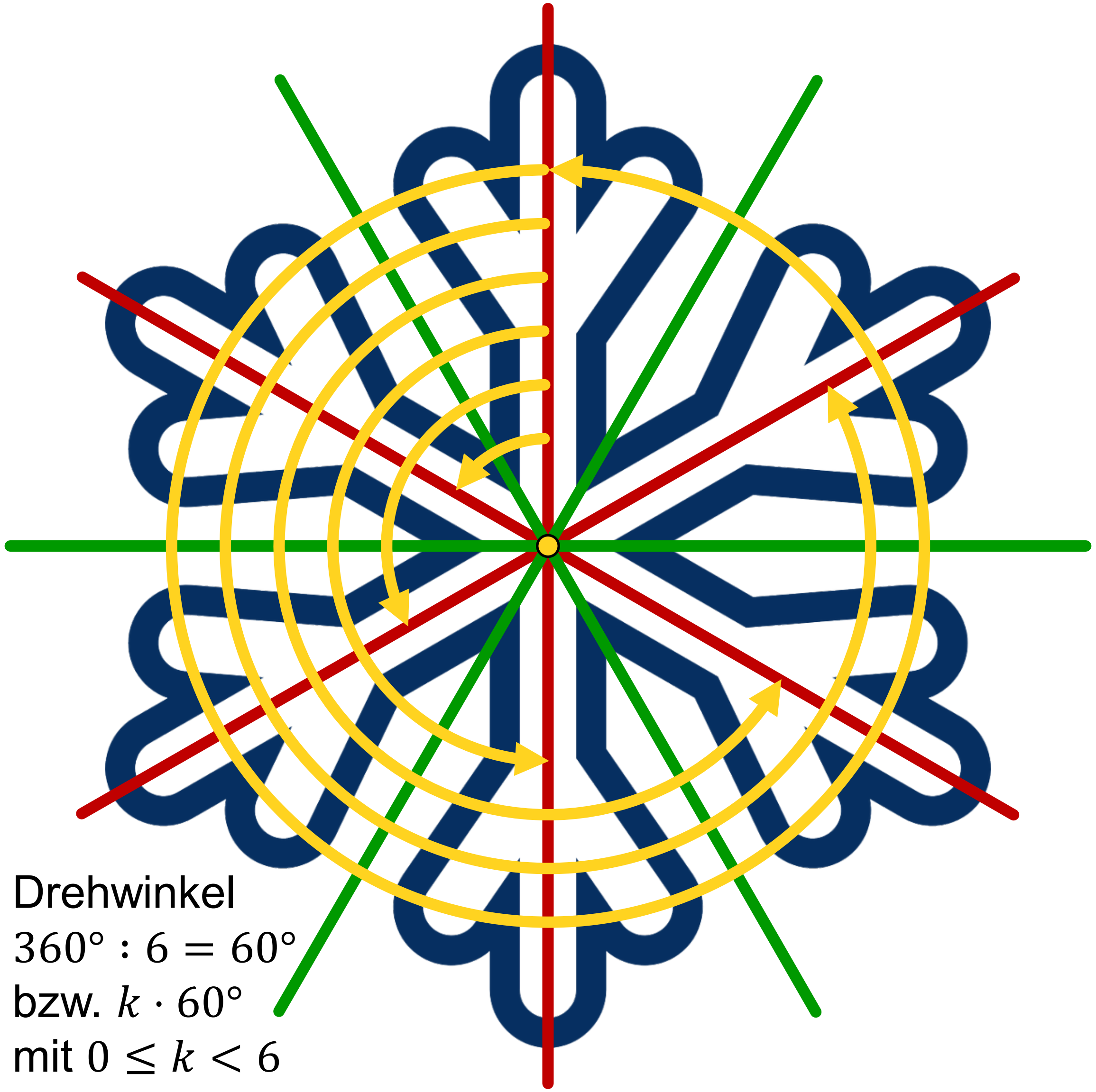
Abbildungen aus
Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 18.

## Kapitel 2: Strukturen geometrischer Symmetrien

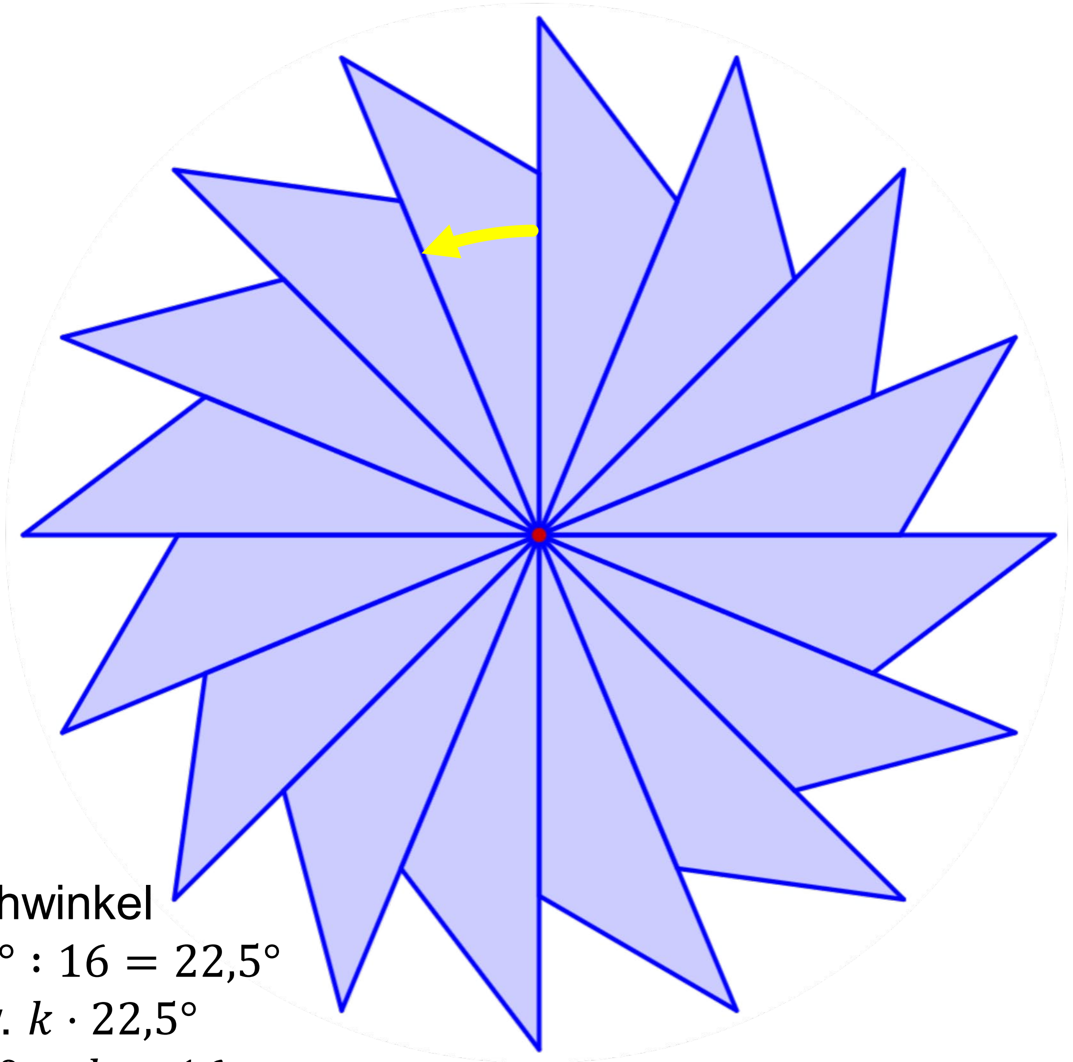
# 2.1 Deckabbildungen von Figuren – Gruppen

# Symmetrische Figuren und ihre Deckabbildungen





Drehwinkel
$360° : 6 = 60°$
bzw. $k \cdot 60°$
mit $0 \leq k < 6$



Drehwinkel
$360° : 16 = 22{,}5°$
bzw. $k \cdot 22{,}5°$
mit $0 \leq k < 16$

https://www.geogebra.org/m/hfnvvn7z

# Deckabbildungen und Symmetrie



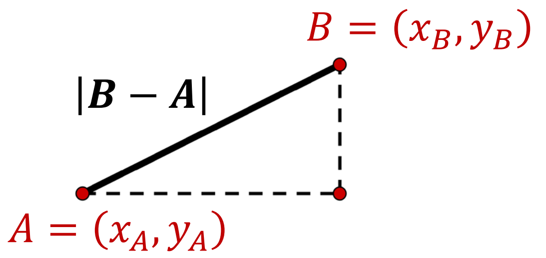
## Definition 2.1.1

- Eine geometrische Figur $F$ ist eine Menge von Punkten der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$.
  Eine Figur $F$ ist demnach eine Teilmenge der Ebene: $F \subseteq \mathbb{R}^2$
- Kongruenzabbildungen (Isometrien) der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf sich, sind die Abbildungen $\varphi$, die die Abstände zwischen Punkten der Ebene und damit die Form aller Figuren nicht verändern.
  $Isom(\mathbb{R}^2) \coloneqq \left\{\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \middle| \forall_{A,B \in \mathbb{R}^2}\ |\varphi(B) - \varphi(A)| = |B - A|\right\}$

**Abstand**

Abstand $|B - A|$ der Punkte $A$ und $B$:

$$|B - A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



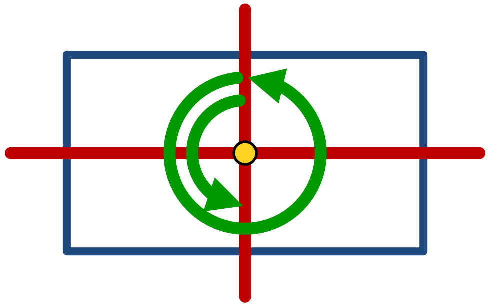

- Eine Kongruenzabbildung $\varphi$, die eine Figur $F$ mit sich selbst zur Deckung bringt, für die also gilt $\varphi(F) = F$, heißt **Deckabbildung** oder Symmetrieabbildung von $F$.
- Eine Figur heißt genau dann **symmetrisch**, wenn sie mindestens eine von der Identität verschiedene Deckabbildung besitzt.
- Die Menge $\boldsymbol{G_F} = \{\varphi \in Isom(\mathbb{R}^2) |\ \varphi(F) = F\}$ aller Deckabbildungen einer Figur $F$ wird als **Symmetrie der Figur $\boldsymbol{F}$** bezeichnet.

https://www.geogebra.org/m/kpww4bah

# Deckabbildungen und Symmetrie

## Bemerkungen

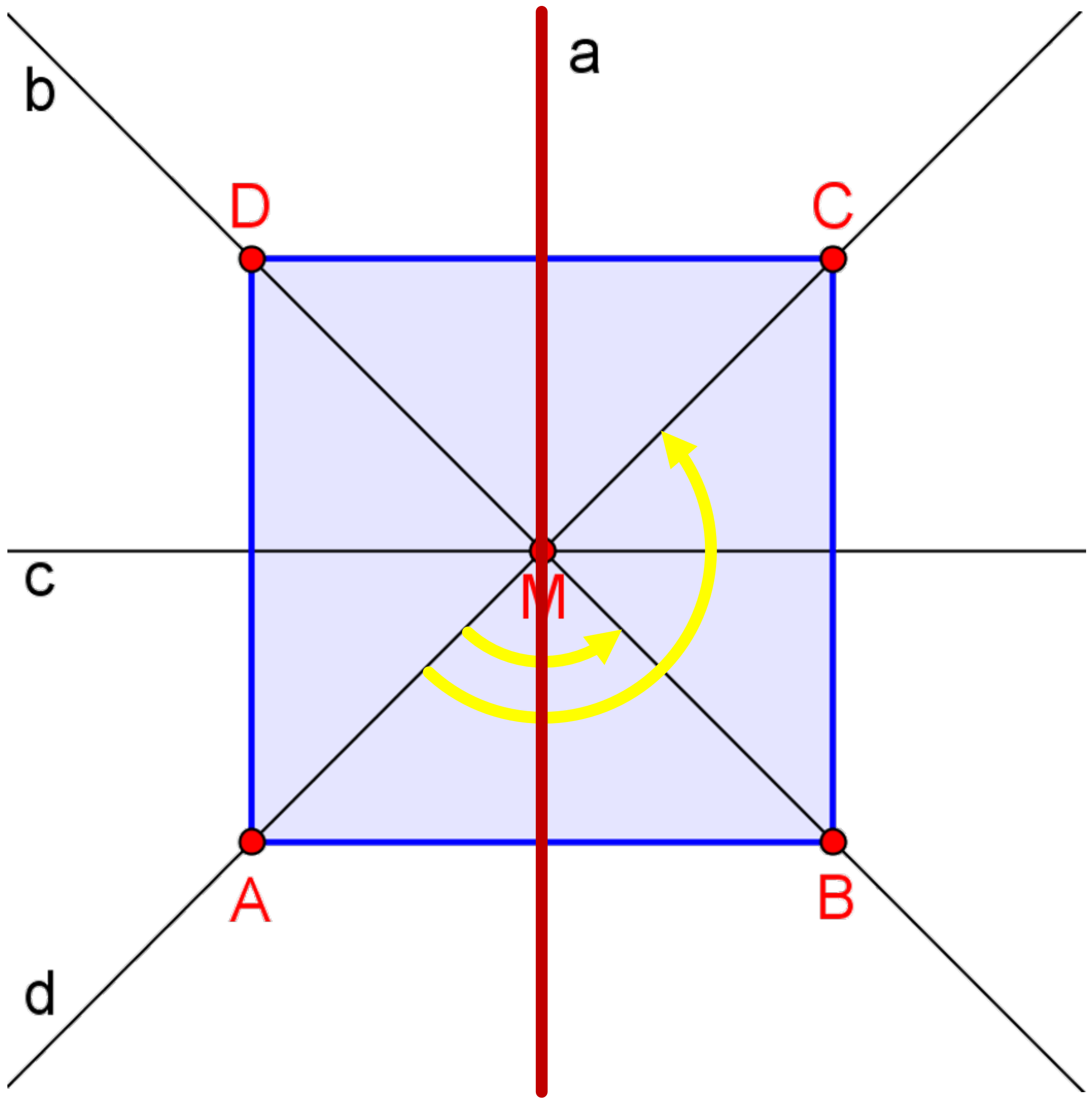
- Die Identität $id$ ist eine Deckabbildung, dies reicht aber nicht, um von Symmetrie sprechen zu können, weil sonst ***jede*** Figur symmetrisch wäre.
- Verschiedene Arten von Symmetrien können bei einer Figur mehrfach und in Kombination miteinander auftreten.
- Ein Rechteck besitzt z. B. immer zwei Symmetrieachsen. Man nennt es deshalb ***zweifach*** achsensymmetrisch. Es ist zusätzlich noch punktsymmetrisch.



- Bei Dreh- und Verschiebungssymmetrie ist jeweils die Besonderheit zu beachten, dass die Identität eine
  - spezielle Drehung, die Nulldrehung,
  - spezielle Verschiebung, die Nullverschiebung, ist.
- Ist eine Figur drehsymmetrisch, gibt es also außer der Identität noch mindestens eine weitere Drehung als Deckabbildung, dann wird die Identität bei der Zahl der Deckabbildungen der Figur mitgezählt.
  - Ein Rechteck ist z. B. zweifach drehsymmetrisch, auch wenn eine der als Deckabbildungen vorkommenden Drehungen die Identität ist.

# Deckabbildungen des Quadrats






- **Spiegelung an $a$**

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

- **Drehung um $M$ um 90°**

$$\boldsymbol{d} := d_{M,90°} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

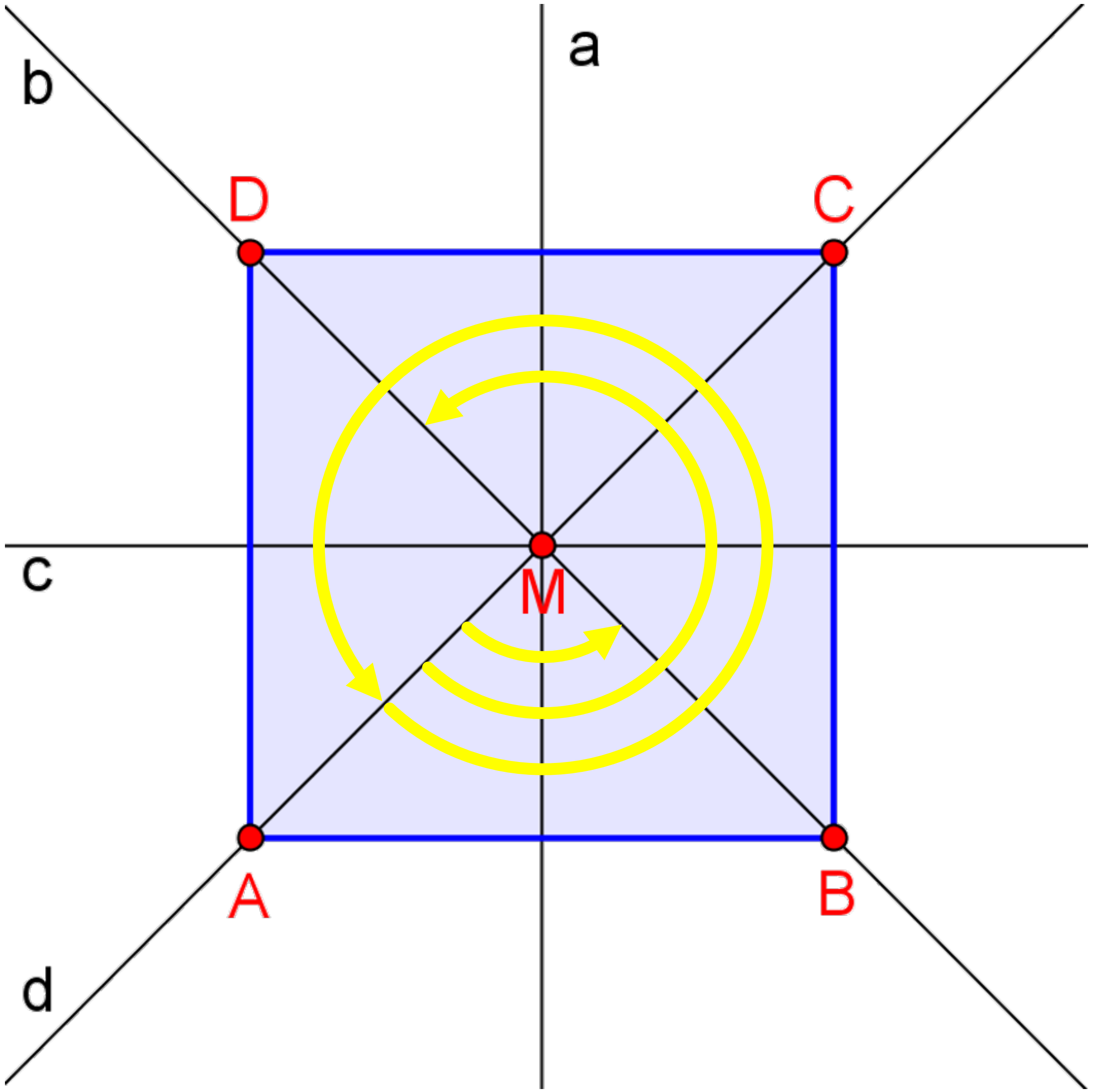
- **Drehung um $M$ um 180°**

$$d_{M,180°} = d_{M,90°} \circ d_{M,90°} = d \circ d = \boldsymbol{d^2}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = p_M$$

# Deckabbildungen des Quadrats



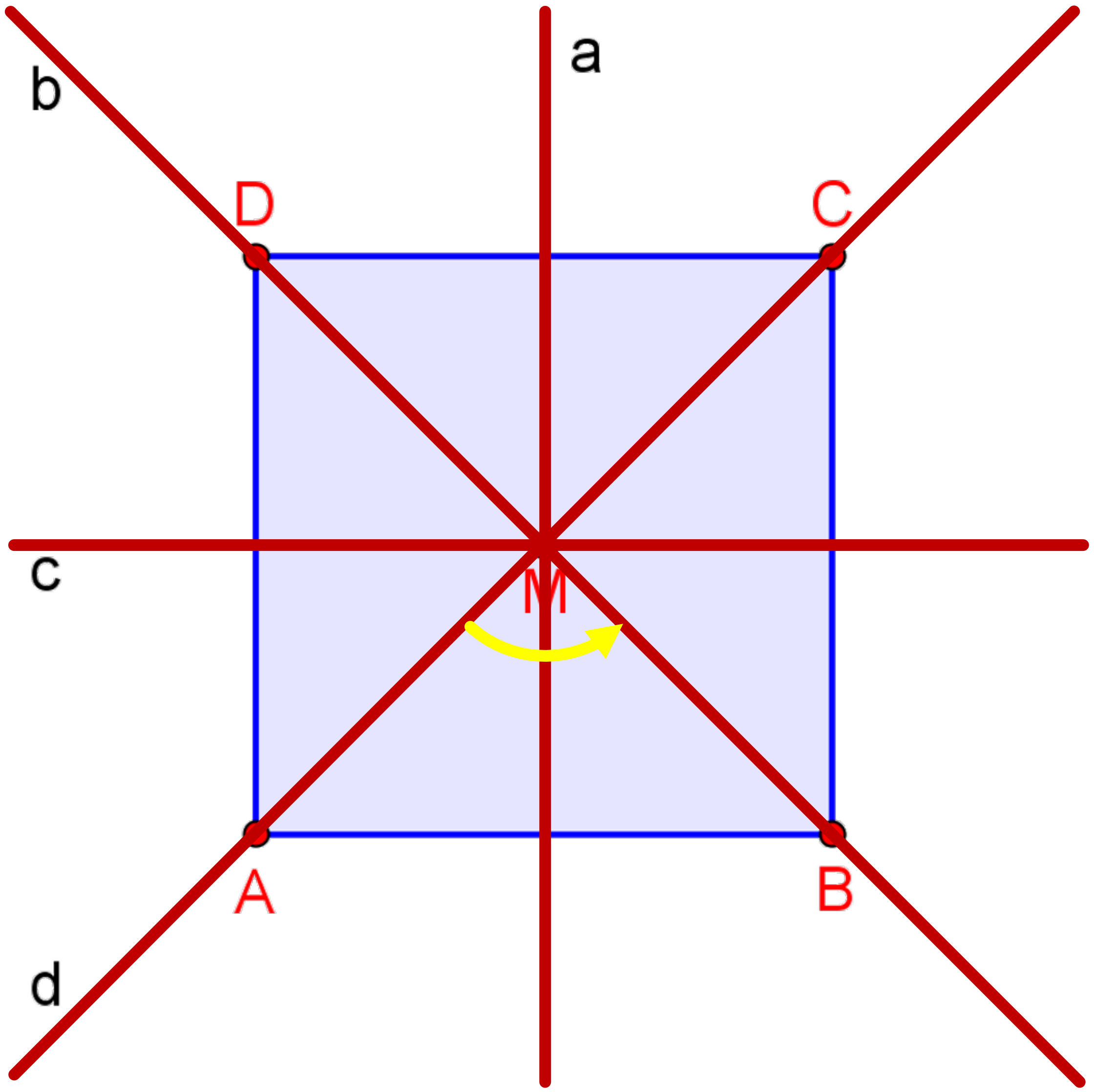

- **Drehung um $M$ um 270°**

$$d_{M,270°} = d_{M,90°} \circ d_{M,90°} \circ d_{M,90°} = d \circ d \circ d = \boldsymbol{d^3}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$
$$\circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}$$

- **Drehung um $M$ um 360°**

$$d_{M,360°} = d_{M,90°} \circ d_{M,90°} \circ d_{M,90°} \circ d_{M,90°}$$
$$= d \circ d \circ d \circ d = \boldsymbol{d^4}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$
$$\circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = \boldsymbol{id} = d_{M,0°}$$

# Deckabbildungen des Quadrats




- **Spiegelung an *a***

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an *b***

$$s_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an *c***

$$s_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an *d***

$$s_d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$

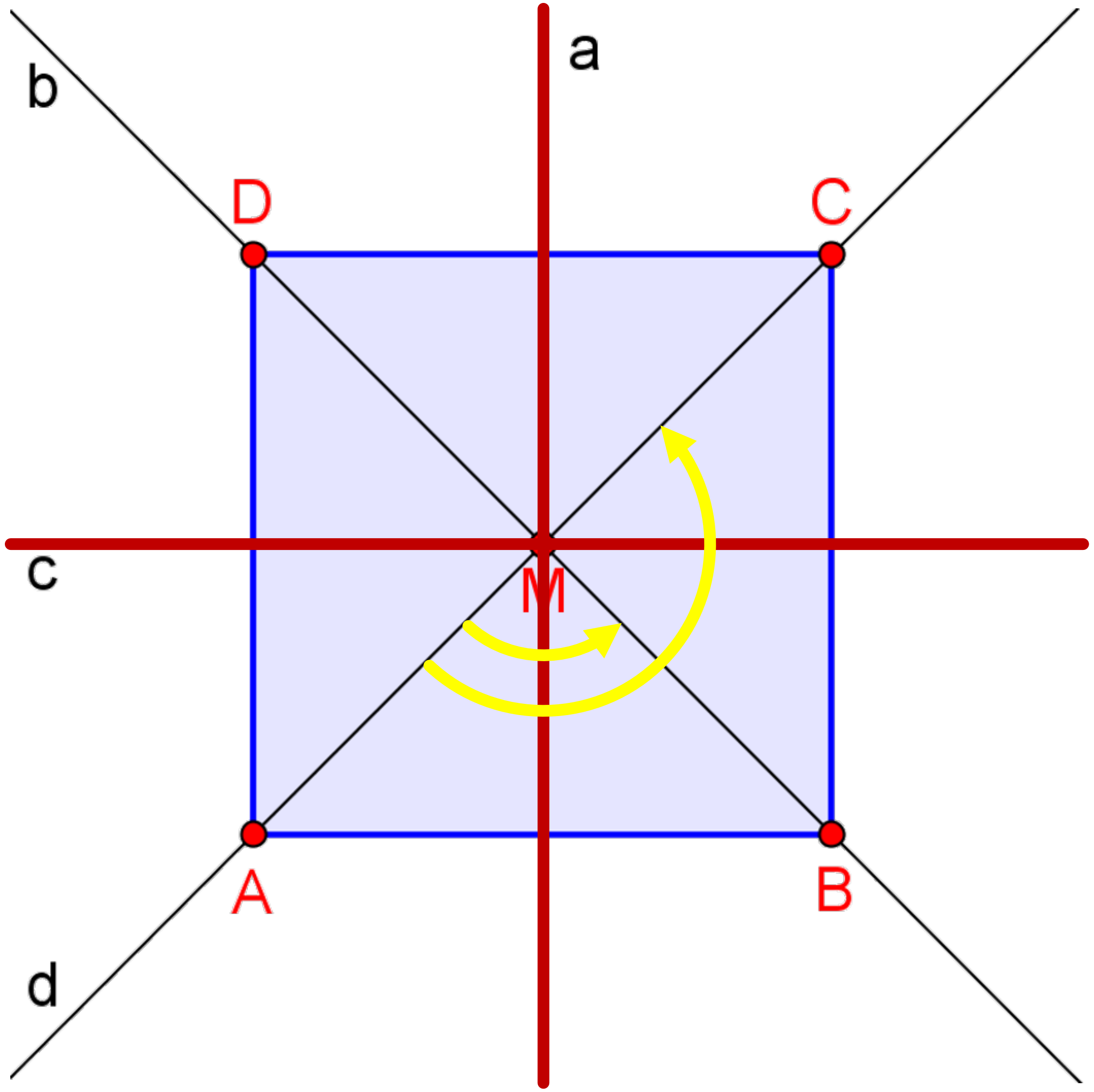
- **Spiegelung an *a* und *b***

$$s_b \circ s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = d_{M,90°} = \boldsymbol{d}$$

- **Spiegelung an *a* und *a***

$$s_a \circ s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = \boldsymbol{id}$$

# Deckabbildungen des Quadrats




- **Spiegelung an $a$**

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $c$**

$$s_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $b$**

$$s_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $d$**

$$s_d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$

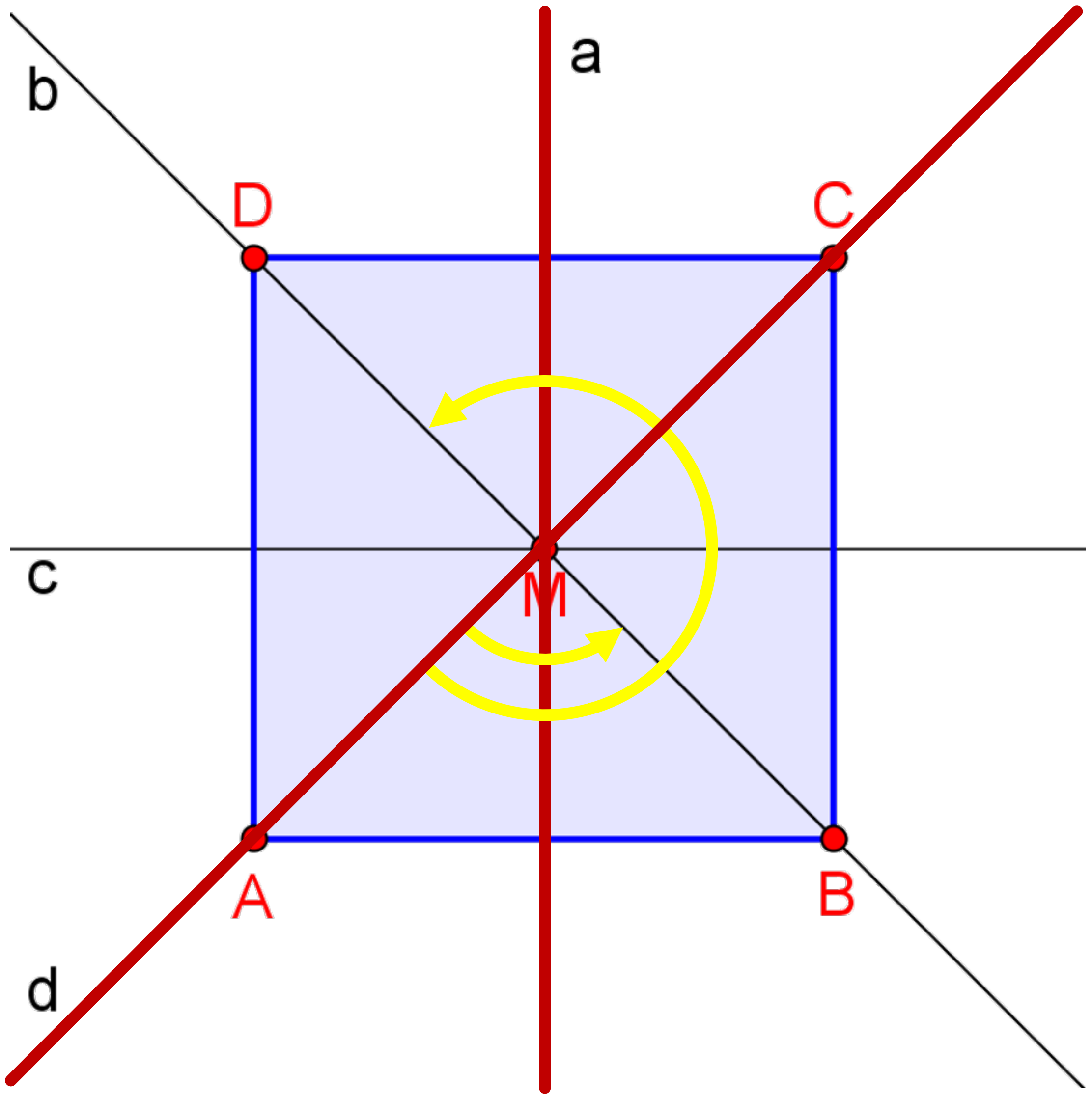
- **Spiegelung an $a$ und $c$**

$$s_c \circ s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = d_{M,180°} = d \circ d = \boldsymbol{d^2}$$

- **Spiegelung an $c$ und $a$**

$$s_a \circ s_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = d_{M,180°} = d \circ d = \boldsymbol{d^2}$$

# Deckabbildungen des Quadrats




- **Spiegelung an $a$**

$$s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $c$**

$$s_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $b$**

$$s_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}$$

- **Spiegelung an $d$**

$$s_d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$

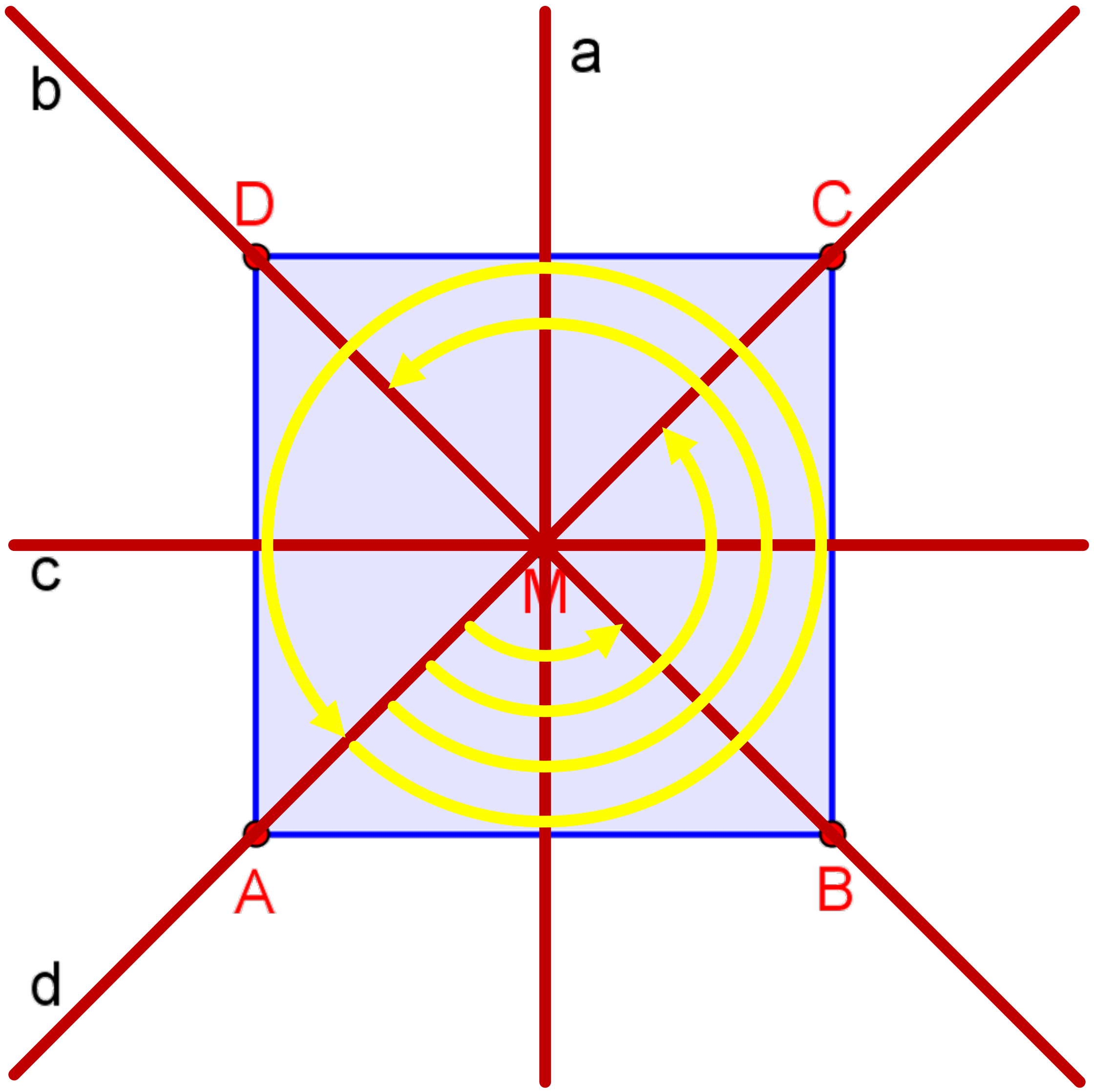
- **Spiegelung an $a$ und $d$**

$$s_d \circ s_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = d_{M,270^\circ} = \boldsymbol{d}^3$$

- **Spiegelung an $d$ und $a$**

$$s_a \circ s_d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = d_{M,90^\circ} = \boldsymbol{d}$$

# Deckabbildungen des Quadrats




- **Analog ergibt sich**

$s_a \circ s_a = id$ | $s_a \circ s_c = d^2$
$s_b \circ s_a = d$ | $s_b \circ s_c = d^3$
$s_c \circ s_a = d^2$ | $s_c \circ s_c = id$
$s_d \circ s_a = d^3$ | $s_d \circ s_c = d$

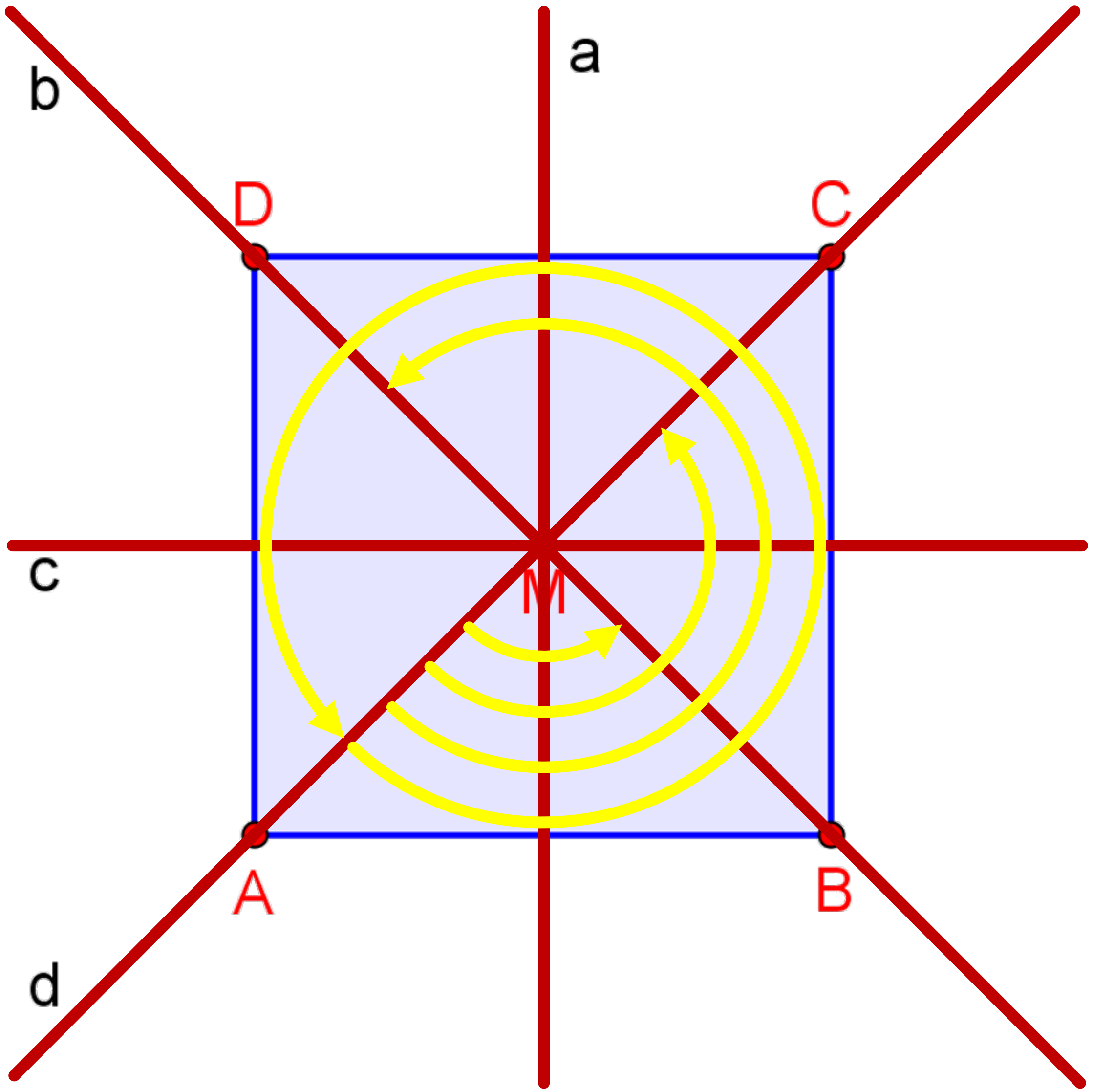
$s_a \circ s_b = d^3$ | $s_a \circ s_d = d$
$s_b \circ s_b = id$ | $s_b \circ s_d = d^2$
$s_c \circ s_b = d$ | $s_c \circ s_d = d^3$
$s_d \circ s_b = d^2$ | $s_d \circ s_d = id$

- **Verknüpfungstabelle**
  - Offensichtlich führt die Verknüpfung zweier Spiegelungen immer zu einer Drehung.

| $\circ$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_a$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

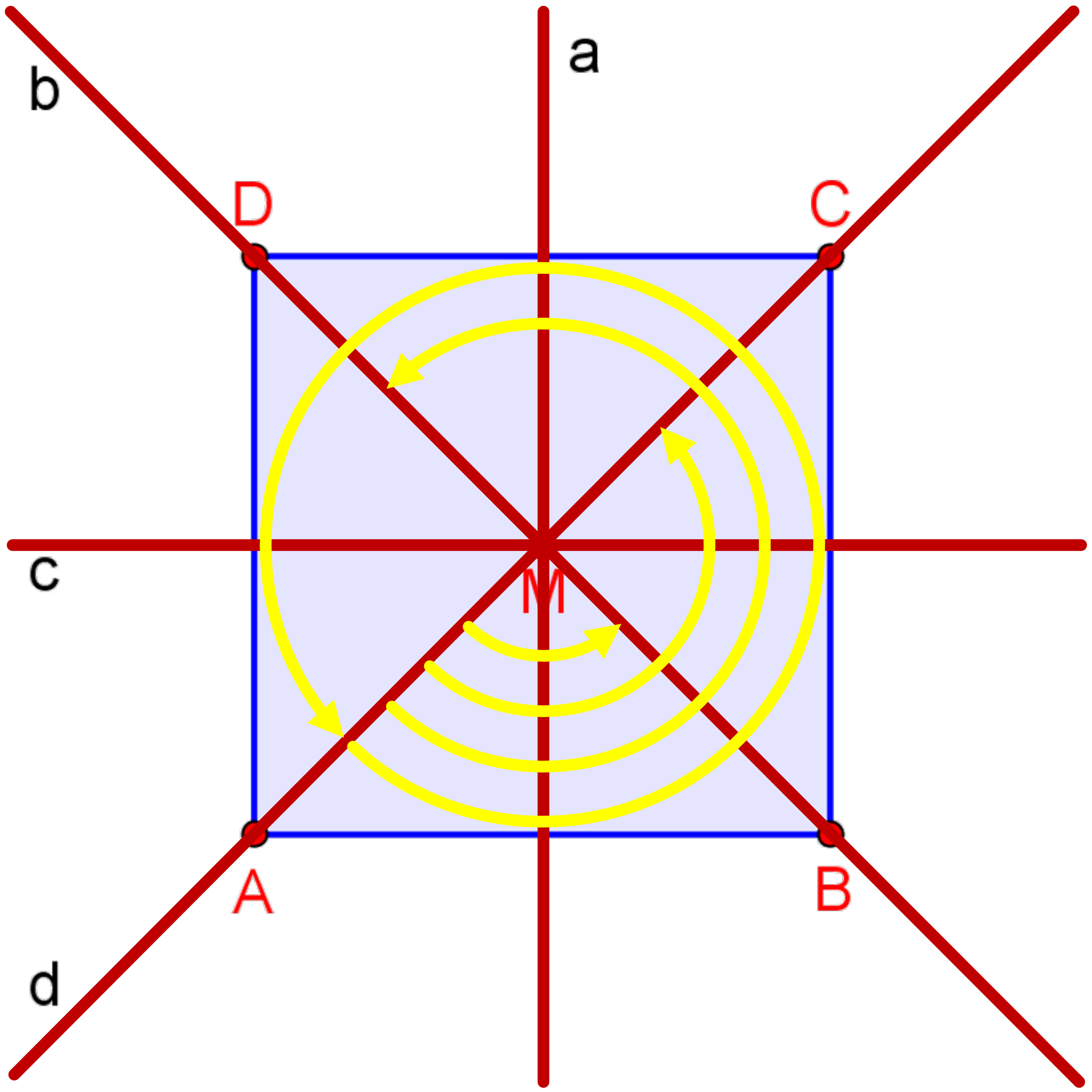
# Deckabbildungen des Quadrats
## Verknüpfungstabelle






| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

Lesen: Spaltenkopf nach Zeilenkopf, also z. B. $s_b \circ s_a = d$




| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

Lesen: Spaltenkopf nach Zeilenkopf, also z. B. $s_b \circ s_a = d$

# Definition Gruppe

## Definition 2.1.2: Gruppe

Eine Menge $G$ zusammen mit einer binären Operation $\circ$ heißt **Gruppe** $(G,\circ)$, wenn die binäre Operation folgende Eigenschaften aufweist:

(G0) $\forall_{a,b\in G}\ a\circ b\in G$ (Abgeschlossenheit)

(G1) $\forall_{a,b,c\in G}\ a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ (Assoziativität)

(G2) $\exists_{e\in G}\ \forall_{a\in G}\ a\circ e=e\circ a=a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(G3) $\forall_{a\in G}\ \exists_{a^{-1}\in G}\ a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$ (Existenz inverser Elemente)

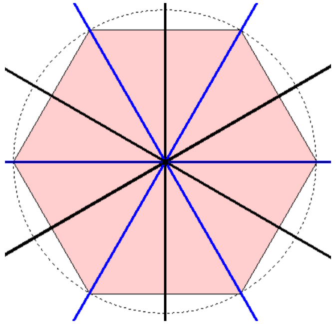
- **Beispiel**
  Diedergruppe $(D_4,\circ)$

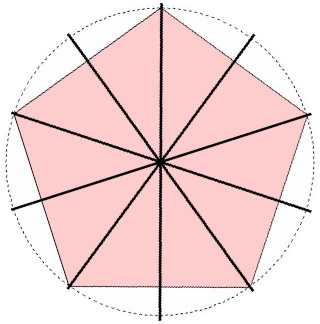
| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

- **Bezeichnung**
  - In der Menge $G_F$ aller Deckabbildungen einer Figur $F$ ist die Verkettung von Abbildungen $\circ$ eine binäre Operation: Zu den Deckabbildungen $\varphi,\psi\in G_F$ wird die Abbildung $\psi\circ\varphi\in G_F$ definiert durch $(\psi\circ\varphi)(A):=\psi(\varphi(A))$.
  - Die Menge $G_F$ heißt zusammen mit der Operation $\circ$ die **Symmetriegruppe** $(G_F,\circ)$ der Figur $F$.

# Deckabbildungen regulärer $n$-Ecke

- **Bemerkung:** Bei regulären $n$-Ecken mit
  - geradzahligem $n$ treten zwei Arten von Symmetrieachsen auf:
    - $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Eckpunkte,
    - $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Seitenmitten.
  - ungeradzahligem $n$ gibt es nur eine Art von Symmetrieachsen:
    - Alle $n$ Symmetrieachsen verlaufen durch einen Eckpunkt und die gegenüberliegende Seitenmitte.





**Satz 2.1.1: Deckabbildungen des regulären $n$-Ecks mit Mittelpunkt $M$**

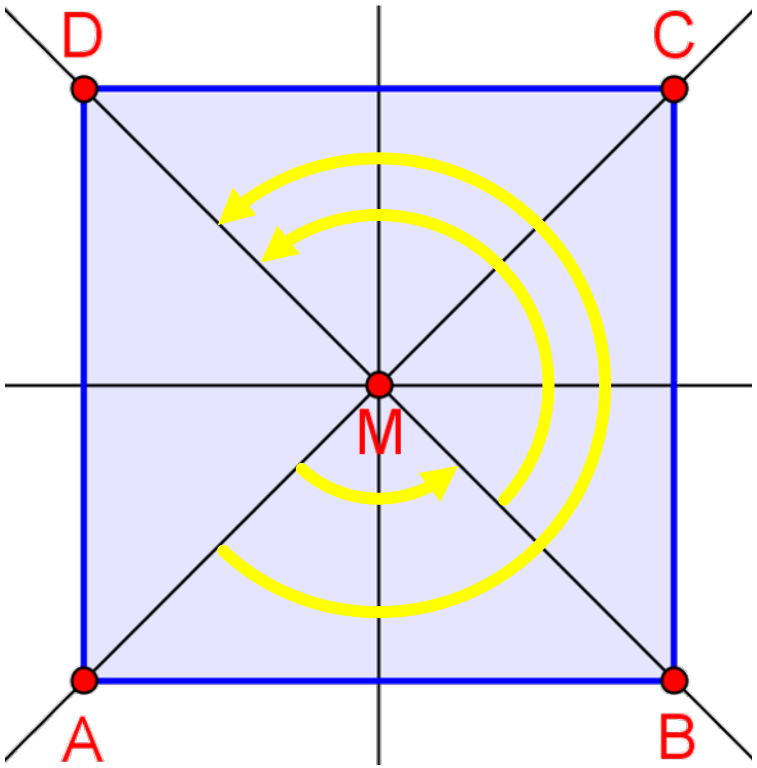
Jedes reguläre $n$-Eck ist $n$-fach drehsymmetrisch und $n$-fach achsensymmetrisch. Es gibt genau $n$ Deckdrehungen um $M$ mit den Drehwinkeln $k \cdot \alpha = \frac{k}{n} \cdot 360°$, wobei $0 \leq k < n$ ist und genau $n$ Deckspiegelungen, wobei der Schnittwinkel zwischen zwei Symmetrieachsen ein Vielfaches von $\frac{1}{n} \cdot 180°$ ist.

# Verkettung von speziellen Abbildungen

**Satz 2.1.2: Verkettung von Drehungen um dasselbe Zentrum**

Die Verkettung zweier Drehungen $d_{Z,\alpha}$ und $d_{Z,\beta}$ um dasselbe Zentrum $Z$ ist eine Drehung um $Z$ mit dem Drehwinkel $\alpha + \beta$.

Kurz: $$d_{Z,\beta} \circ d_{Z,\alpha} = d_{Z,\alpha+\beta}$$




**Satz 2.1.3: Gruppe der Drehungen um ein festes Zentrum**

Die Menge der Drehungen um ein festes Zentrum $Z$ bildet bezüglich der Verkettung eine kommutative Gruppe.

**Satz 2.1.4: Gruppe der Drehungen und Spiegelungen**

Die Menge der Drehungen um ein festes Zentrum $Z$ und aller Spiegelungen an Geraden durch $Z$ bildet bezüglich der Verkettung eine *nicht*-kommutative Gruppe.

# Bierdeckelgruppen

$G_{\text{Ellipse}} = \{id, d_{M,180°}, s_a, s_b\}$


Orthogonale Gruppe $O(\mathbb{R}^2)$


$G_{\text{Ei}} = \{id, s\}$


$G_F = \{id, s\}$


$G_{\text{gleichschenkliges Dreieck}} = \{id, s\}$



$D_3 = \{id, d_{M,120°}, d_{M,240°}, s_a, s_b, s_c\}$


$G_{\text{Rechteck}} = \{id, d_{M,180°}, s_a, s_b\}$


Keine Symmetriegruppe, da nur die identische Abbildung als Deckabbildung existiert!

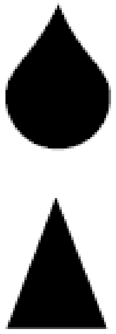
$G_F = \{id\}$


$D_4 = \{id, d_{M,90°}, d_{M,180°}, d_{M,270°}, s_a, s_b, s_c, s_d\}$

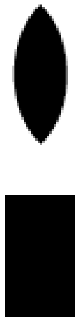
Abbildungen aus Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 31.

# Diedergruppe $D_n$ und zyklische Gruppe $Z_n$
## Bierdeckelgruppen

Abbildungen aus Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Springer Spektrum, 33.

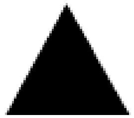


| $\circ$ | $1$ | $s$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $1$ |

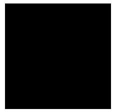


| $\circ$ | $1$ | $d_{180}$ | $s_a$ | $s_b$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $d_{180}$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d_{180}$ | $d_{180}$ | $1$ | $s_b$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $1$ | $d_{180}$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_a$ | $d_{180}$ | $1$ |

$$1 \coloneqq id$$
$$d_{180} \coloneqq d_{M,180°}$$



| $\circ$ | $1$ | $d_{120}$ | $d_{240}$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $d_{120}$ | $d_{240}$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d_{120}$ | $d_{120}$ | $d_{240}$ | $1$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_a$ |
| $d_{240}$ | $d_{240}$ | $1$ | $d_{120}$ | $s_c$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_c$ | $s_b$ | $1$ | $d_{240}$ | $d_{120}$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_a$ | $s_c$ | $d_{120}$ | $1$ | $d_{240}$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_b$ | $s_a$ | $d_{240}$ | $d_{120}$ | $1$ |



| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

### Definition 2.1.3

- Die Gruppe der Deckabbildungen eines regulären $n$-Ecks heißt Diedergruppe $\boldsymbol{D_n}$.
- Die zyklische Gruppe der Deckdrehungen eines regulären $n$-Ecks heißt zyklische Drehgruppe $\boldsymbol{Z_n}$.

# Diedergruppe $D_n$ und zyklische Gruppe $Z_n$

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

**Satz 2.1.5**

- Die Diedergruppe $D_n$ enthält $2n$ Elemente:
  - $n$ Drehungen um Vielfache von $\frac{360°}{n}$ um den Mittelpunkt $M$ des regulären $n$-Ecks, die man als $id, d, d^2, \dots, d^{n-1}$ schreiben kann.
  - $n$ Spiegelungen $s_1, \dots, s_n$.
- Für Drehungen gilt: $d^i \circ d^k = d^{i+k}$ (bzw. $d^i \circ d^k = d^{i+k-n}$, falls $i + k \geq n$)
- Für Spiegelungen gilt: $(s_i)^2 = s_i \circ s_i = id$
- Die Diedergruppe $D_n$ ist für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ, denn $s_i \circ d \neq d \circ s_i$.

**Beispiel**

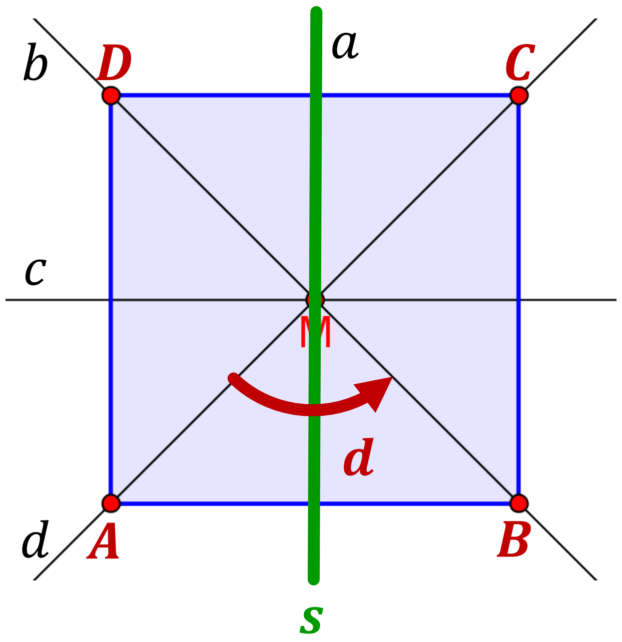
Diedergruppe $(D_4, \circ)$

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ |
| $s_a$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $s_b$ | $s_b$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_c$ | $s_c$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $s_a$ | $s_b$ | $s_c$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

**Satz 2.1.6: Symmetrische Figuren**

Jede Figur mit endlichen vielen Symmetrien hat als Symmetriegruppe entweder eine zyklische Drehgruppe $Z_n$ oder eine Diedergruppe $D_n$.

# Verknüpfungstafel Diedergruppe $D_4$




$$id = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = d_{M,0°}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \mathbf{d_{M,90°}}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = d_{M,180°}$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = d_{M,270°}$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \mathbf{s_a}$$

$$ds = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = s_b$$

$$d^2s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = s_c$$

$$d^3s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} = s_d$$

$Z_4$

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $d^3s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

# Deckabbildungen des regulären Sechsecks $F_6$

▷ **Deckdrehungen** des regulären Sechsecks:

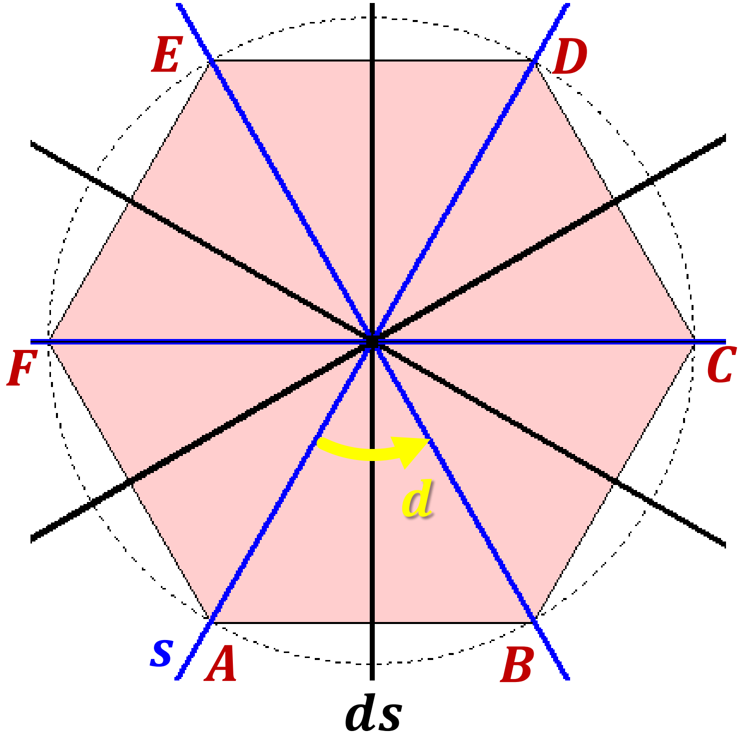
$$\boxed{Z_6 = (\{id, d_{M,60°}, d_{M,120°}, d_{M,180°}, d_{M,240°}, d_{M,300°}\}, \circ)}$$

Mit $d := d_{M,60°}$

und $d^2 := d \circ d = d_{M,60°} \circ d_{M,60°} = d_{M,120°}$

ergibt sich: $d = d_{M,60°}, d^2 = d_{M,120°}, d^3 = d_{M,180°},$

$d^4 = d_{M,240°}, d^5 = d_{M,300°}, d^6 = d_{M,0°} = id$




▷ **Deckspiegelungen** des regulären Sechsecks

Aus $s := s_a$ mit $s_a(F_6) = F_6$ und $d \circ s := ds$ folgt:

$s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s$

▷ **Alle Deckabbildungen** des regulären Sechsecks $F_6$:

$$\boxed{D_6 = (\{\underbrace{id, d, d^2, d^3, d^4, d^5}_{\text{Zyklische Drehgruppe } Z_6}, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s\}, \circ)}$$

Diedergruppe $D_6$

# Verknüpfungstafel Diedergruppe $D_6$

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

**Bemerkung:** Es gilt:

- $d^k s = s d^{n-k}$ $\quad (*)$
- $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1} \quad (**)$

## Beweis zu $(*)$

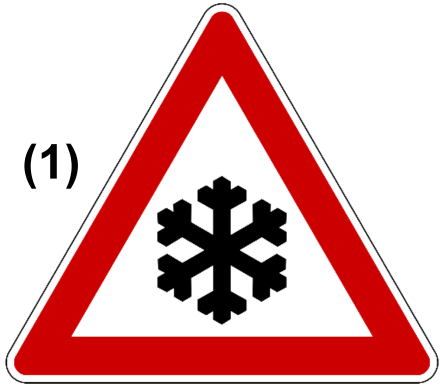
- $d^k s$ ist eine Achsenspiegelung und damit selbstinvers (involutorisch):
$$\left(d^k s\right)^{-1} = d^k s$$
- Mit $\left(d^k\right)^{-1} = d^{n-k}$ gilt aber auch:
$$\left(d^k s\right)^{-1} \overset{(**)}{=} s^{-1}\left(d^k\right)^{-1} = s\left(d^k\right)^{-1} = s d^{n-k}$$

#

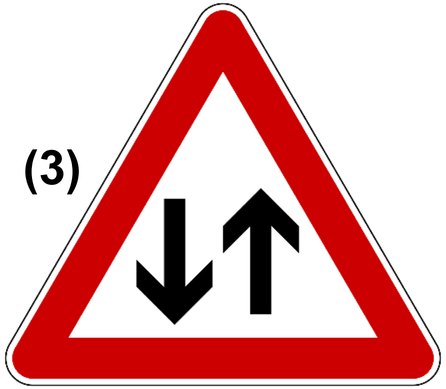
$Z_6$

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d^4$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^5$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $d^3s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $d^4s$ | $d^4s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ | $d$ |
| $d^5s$ | $d^5s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $d^4s$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $d^4$ | $d^5$ | $id$ |

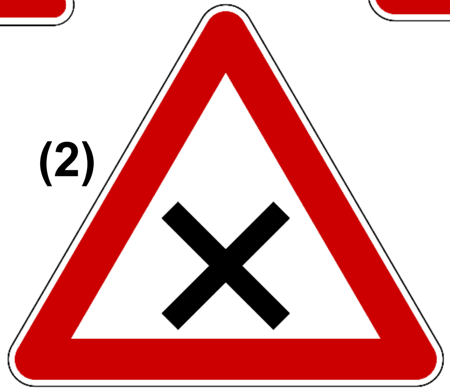
(1)



(3)

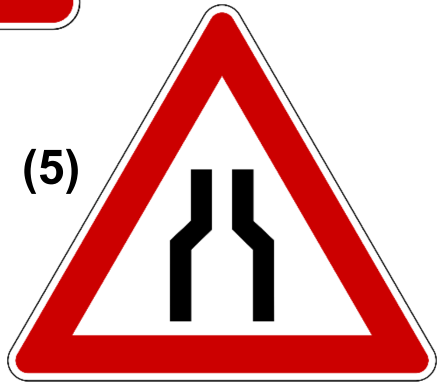


(2)



(4)

(5)

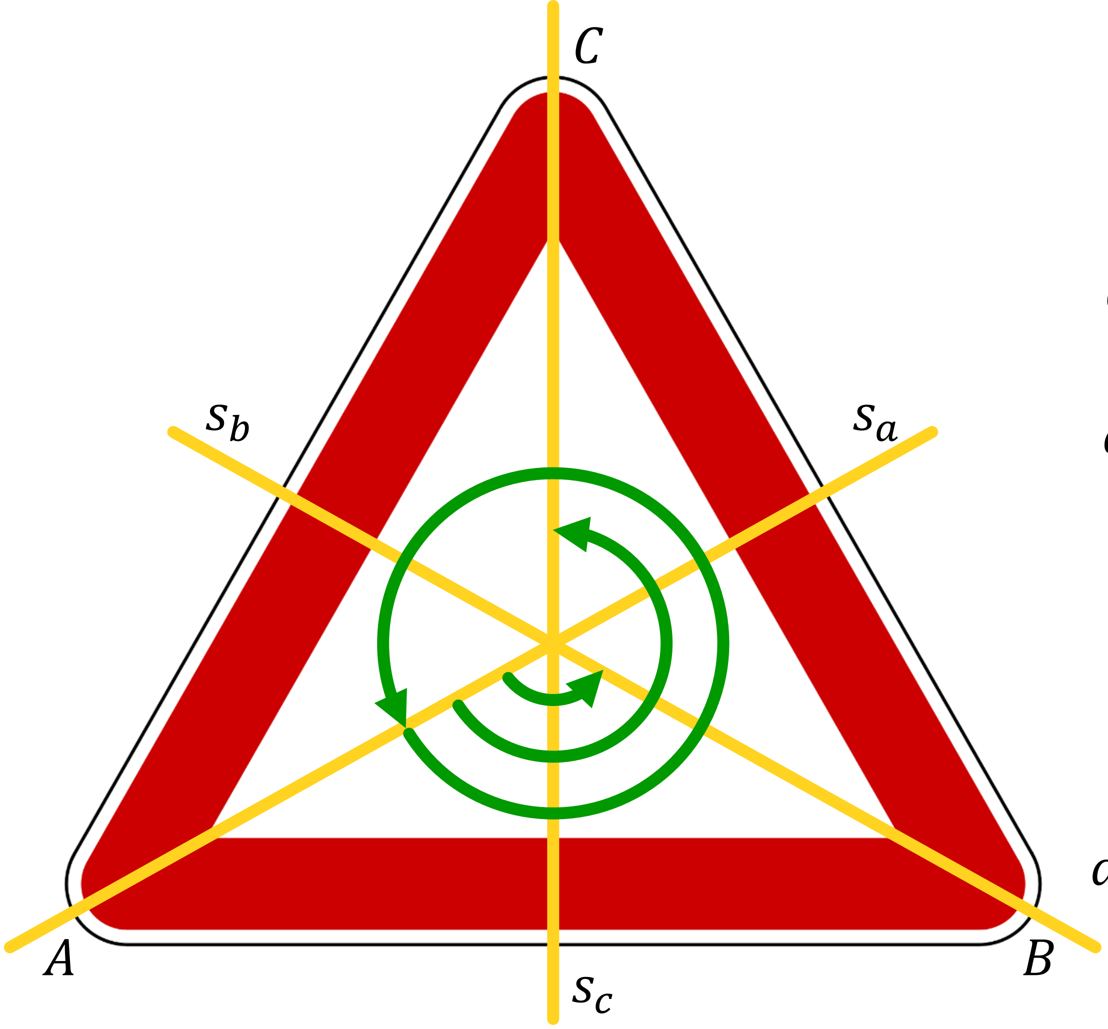


Kapitel 2: Strukturen geometrischer Symmetrien

# 2.2 Symmetrien sortieren – Untergruppen

# Symmetrie von △ ist $D_3$






$$d = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = d_{M,120°}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} = d_{M,240°}$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} = id$$

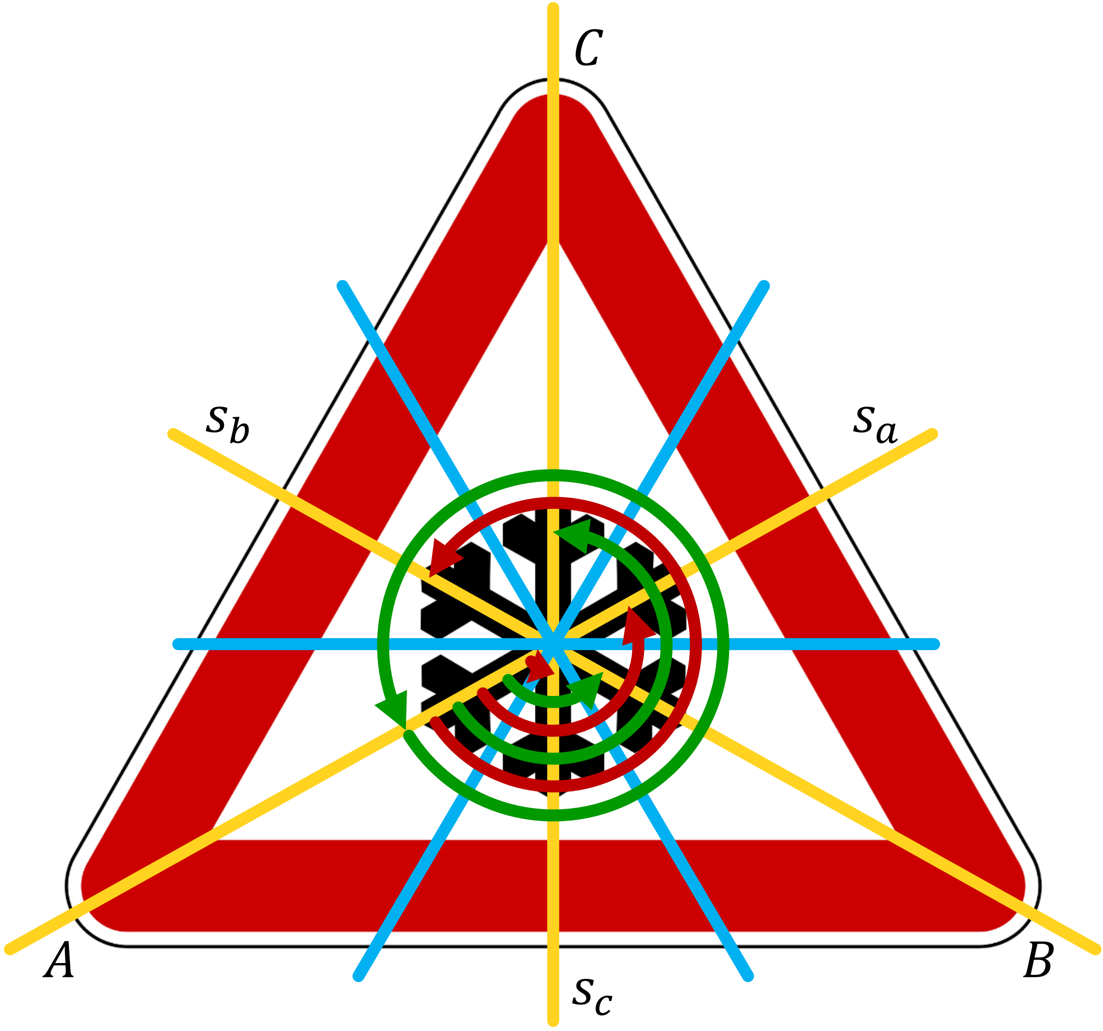
$$s = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} = s_a$$

$$ds = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} = s_c$$

$$d^2s = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = s_b$$

| $\circ$ | **id** | **d** | **$d^2$** | **s** | **ds** | **$d^2s$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **id** | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| **d** | $d$ | $d^2$ | $id$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ |
| **$d^2$** | $d^2$ | $id$ | $d$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ |
| **s** | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| **ds** | $ds$ | $d^2s$ | $s$ | $d^2$ | $id$ | $d$ |
| **$d^2s$** | $d^2s$ | $s$ | $ds$ | $d$ | $d^2$ | $id$ |

# Symmetrie von  ist $D_6$




Die Schneeflocke im Schild „Schneeglätte“ hat eine $\boldsymbol{D_6}$-Symmetrie, also die eines regelmäßigen Sechsecks mit 6 Drehsymmetrien und 6 Spiegelachsen.

Die Deckabbildungen des Dreiecks (**gelbe** Spiegelachsen und **grüne** Drehungen) sind alle in denen des Sechsecks enthalten.

$\boldsymbol{D_3}$ ist damit eine Teilmenge von $\boldsymbol{D_6}$.

$$\boldsymbol{D_3} = \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\}$$
$$\subset \{id, d, d^2, d^3, d^4, d^5, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s\} = \boldsymbol{D_6}$$

$\boldsymbol{D_3}$ ist zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen gleichzeitig auch eine Gruppe.

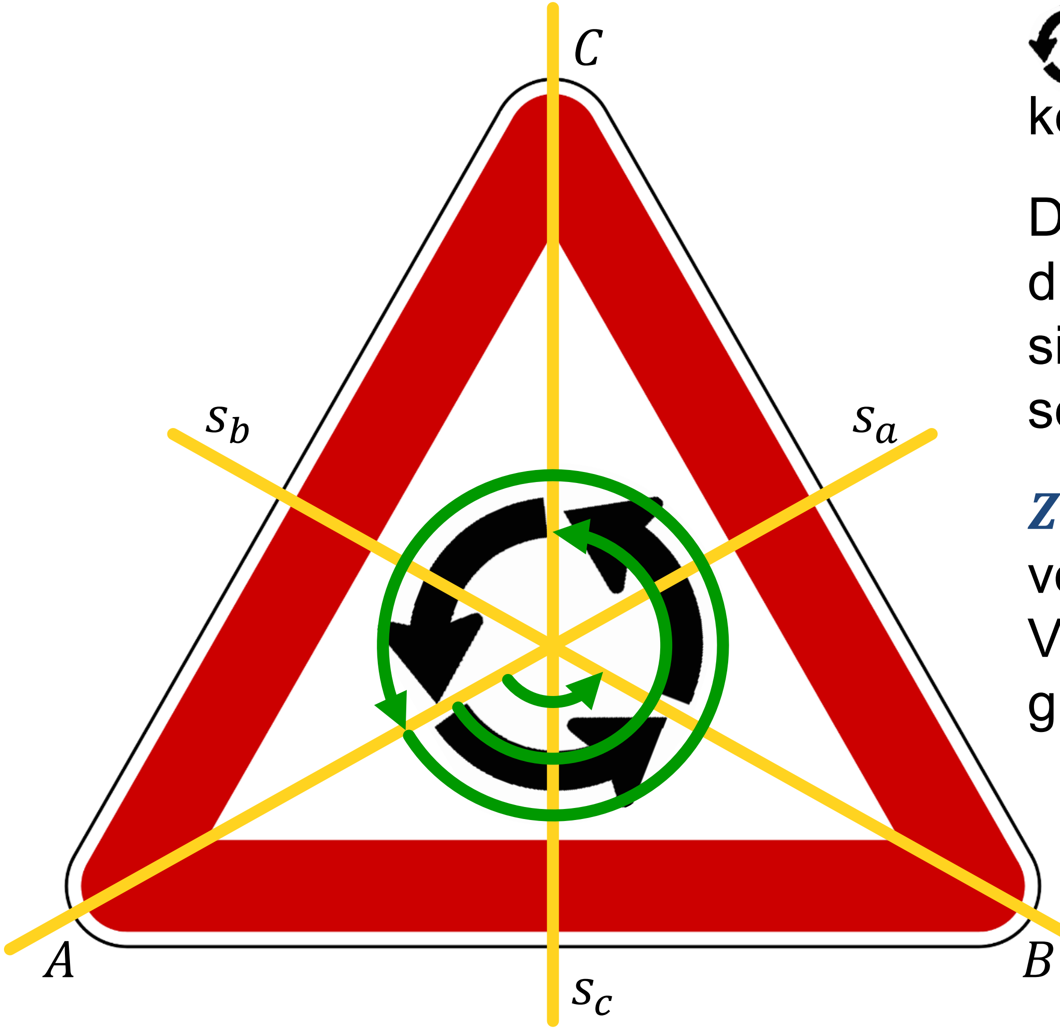
Man bezeichnet $(\boldsymbol{D_3}, \circ)$ deshalb auch als **Untergruppe** von $(\boldsymbol{D_6}, \circ)$.

# Symmetrie von  ist $Z_3$

 im Schild „Kreisverkehr“ hat eine $Z_3$-Symmetrie.

Die Deckabbildungen dieser drei Pfeile (**grüne** Drehungen) sind alle in denen des gleichseitigen Dreiecks enthalten.

$Z_3$ ist also eine Teilmenge von $D_3$ und zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen gleichzeitig auch eine Gruppe.




$Z_3$

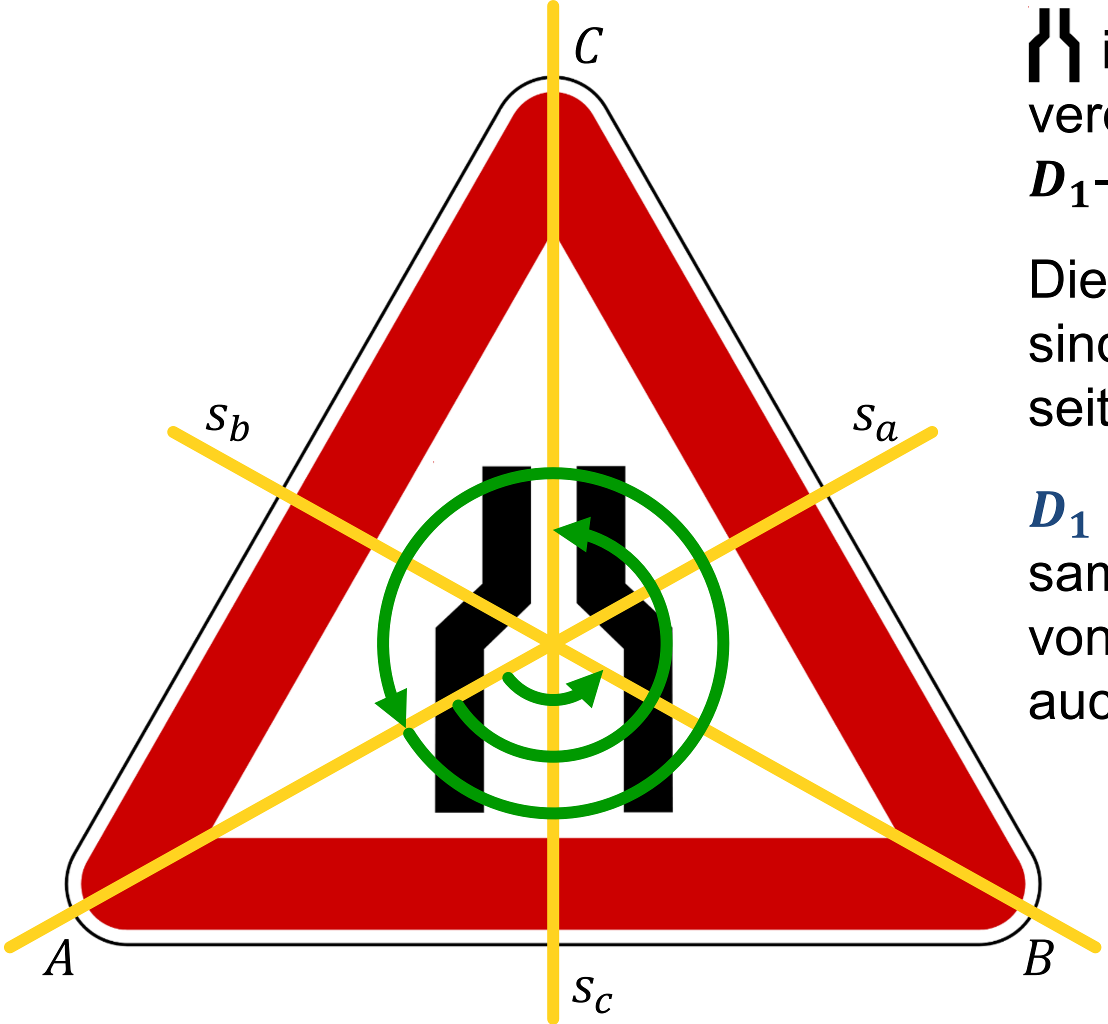
| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $id$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $id$ | $d$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ | $d^2$ | $id$ | $d$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ | $d$ | $d^2$ | $id$ |

$(Z_3,\circ)$ ist also eine **Untergruppe** von $(D_3,\circ)$.

$$Z_3 = \{id, d, d^2\} \subset \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\} = D_3$$

# Symmetrie von ist $D_1$






im Schild „Fahrbahn-verengung“ hat eine $D_1$-Symmetrie.

Die Deckabbildungen von sind alle in denen des gleichseitigen Dreiecks enthalten.

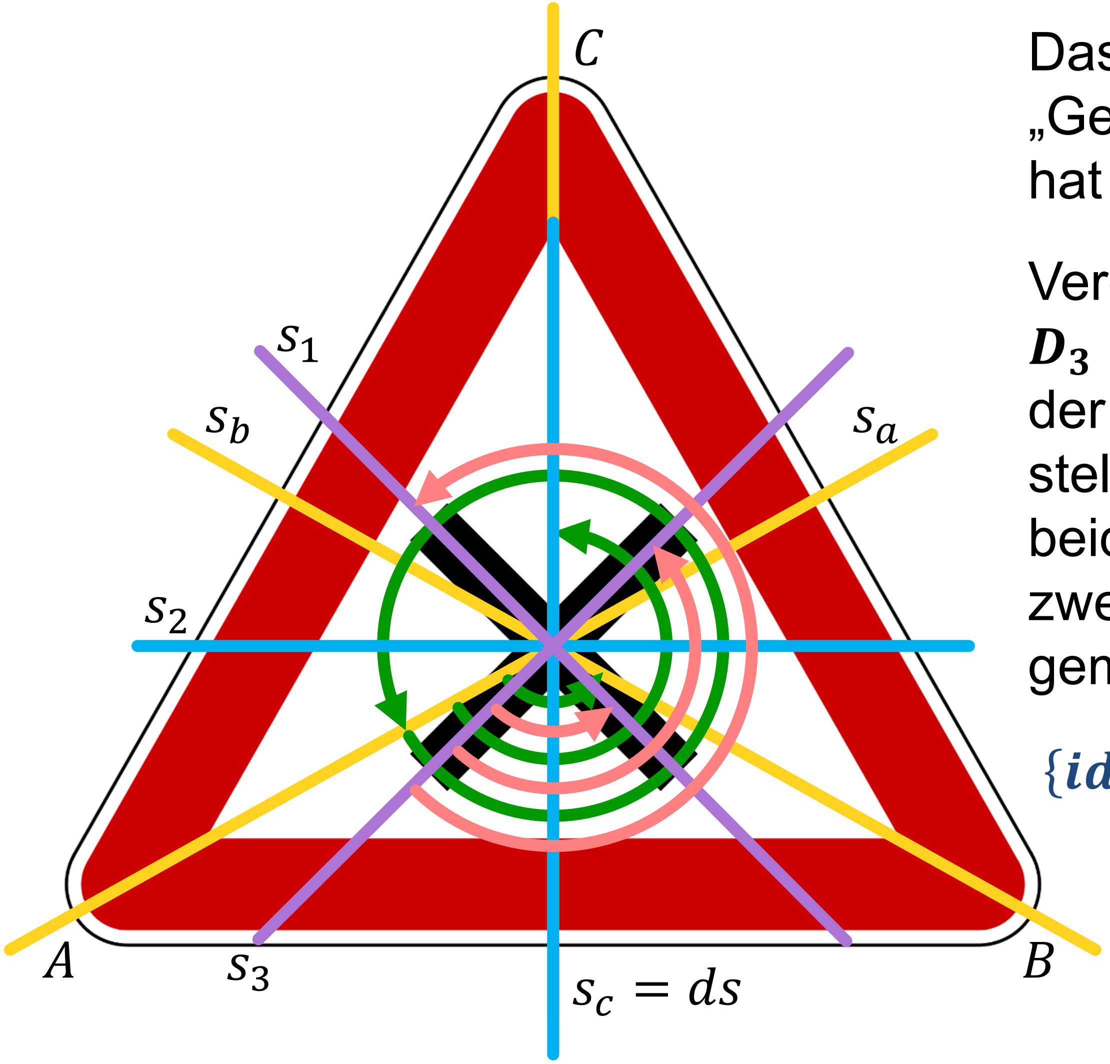
$D_1 = \{id, ds\} \subset D_3$ und zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen gleichzeitig auch eine Gruppe.

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $id$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $id$ | $d$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ | $d^2$ | $id$ | $d$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ | $d$ | $d^2$ | $id$ |

$(D_1, \circ)$ ist also eine **Untergruppe** von $(D_3, \circ)$.
$D_1 = \{id, ds\} \subset \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\} = D_3$

| $\circ$ | $id$ | $ds$ |
|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $ds$ |
| $ds$ | $ds$ | $id$ |

# Symmetrie von ✕ ist $\boldsymbol{D_4}$




Das ✕ im Schild „Gefährliche Kreuzung“ hat eine $\boldsymbol{D_4}$-Symmetrie.

Vergleicht man diese mit $\boldsymbol{D_3} = \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\}$, der Symmetrie von △, so stellt man fest, dass die beiden Symmetrien genau zwei Deckabbildungen gemeinsam haben, nämlich:

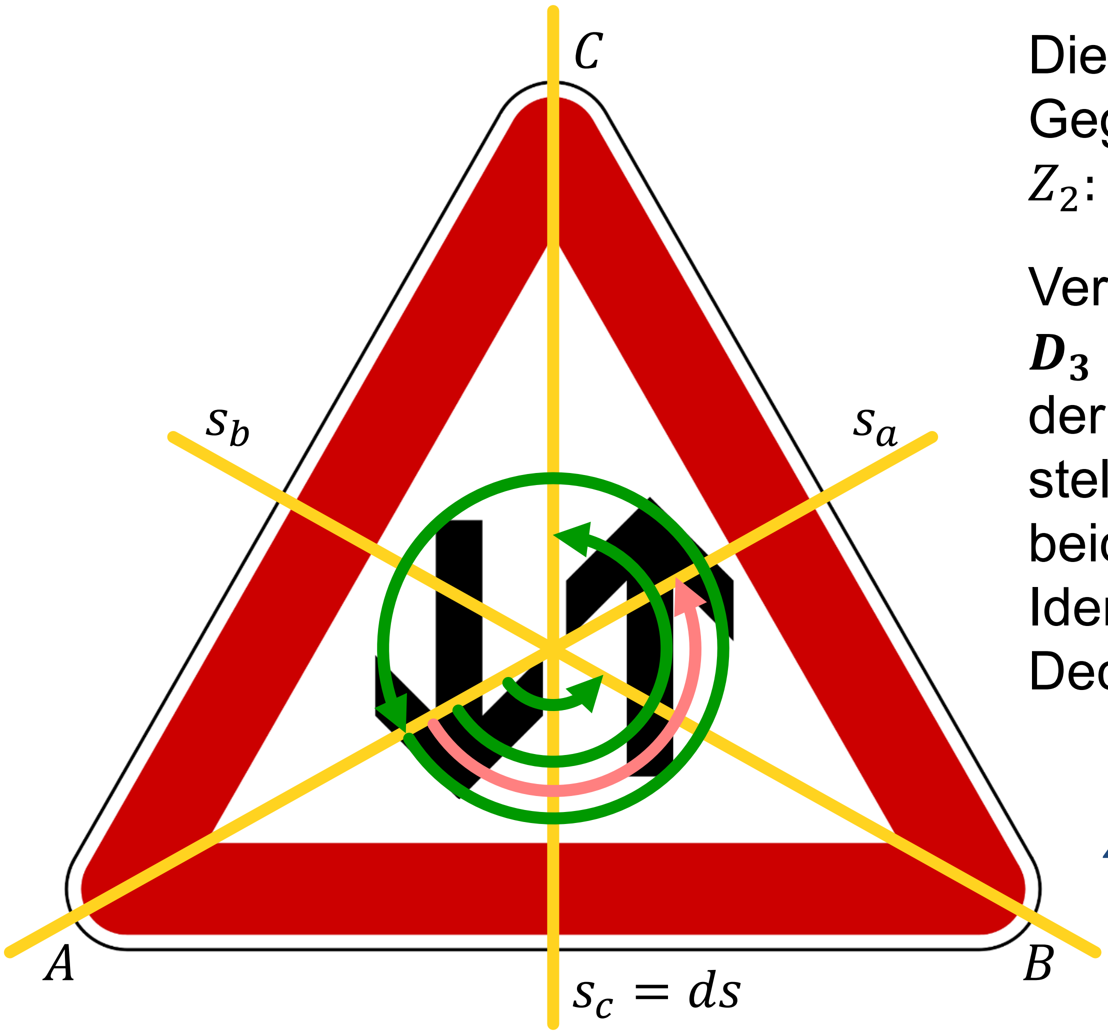
| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $id$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $id$ | $d$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ | $d^2$ | $id$ | $d$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ | $d$ | $d^2$ | $id$ |

$$\{\boldsymbol{id}, \boldsymbol{ds}\} = \{id, d_{M,90°}, d_{M,180°}, d_{M,270°}, ds, s_1, s_2, s_3\} \cap \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\} = \boldsymbol{D_4} \cap \boldsymbol{D_3} = \boldsymbol{D_1}$$

| $\circ$ | $id$ | $ds$ |
|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $ds$ |
| $ds$ | $ds$ | $id$ |

$(\boldsymbol{D_1}, \circ)$ ist eine Untergruppe von $(\boldsymbol{D_3}, \circ)$ und von $(\boldsymbol{D_4}, \circ)$.

# Symmetrie von ↓↑ ist $Z_2$




Die ↓↑ im Schild „Vorsicht Gegenverkehr“ hat eine $Z_2 := \{id, d_{M,180°}\}$-Symmetrie.

Vergleicht man diese mit $\boldsymbol{D_3} = \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\}$, der Symmetrie von △, so stellt man fest, dass die beiden Symmetrien nur die Identität als gemeinsame Deckabbildungen haben:

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $id$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $id$ | $d$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $s$ | $d^2$ | $id$ | $d$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $s$ | $ds$ | $d$ | $d^2$ | $id$ |

$$\boldsymbol{Z_2} \cap \boldsymbol{D_3} = \{id, d_{M,180°}\} \cap \{id, d, d^2, s, ds, d^2s\} = \{id\} =: \boldsymbol{E}$$

$(\boldsymbol{E},\circ)$ ist eine Untergruppe von $(\boldsymbol{D_3},\circ)$ und von $(\boldsymbol{Z_2},\circ)$.

# Definition Untergruppe

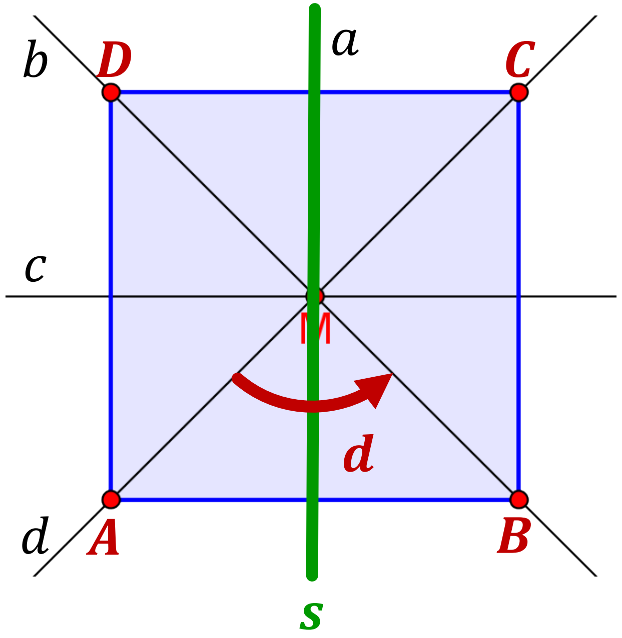
## Bemerkung

Die Untergruppendefinition ist so formuliert, dass sie für beliebige, auch nicht-geometrische Gruppen genutzt werden kann.

### Definition 2.2.1: Untergruppe

- Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe. Wenn eine Teilmenge $U$ der Menge $G$ $(U \subseteq G)$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$ der Gruppe $(G,\circ)$ wieder eine Gruppe $(U,\circ)$ bildet, dann nennt man $U$ eine **Untergruppe** von $G$ und schreibt: $U \leq G$
- Das „≤"-Zeichen statt des „⊆" bedeutet, dass nicht nur die Mengen ineinander liegen, son-dern mit derselben Verknüpfung $\circ$ auch die Gruppenkriterien Abgeschlossenheit, Assoziati-vität, Existenz eines neutralen Elements und Existenz von inversen Elementen erfüllt sind.
- Die triviale Gruppe $E = \{id\}$ und die Gruppe $G$ selbst, sind immer Untergruppen von $G$.
- Die Schnittmenge von zwei Untergruppe $H$ und $I$ einer Gruppe $G$ ist Untergruppe beider Gruppen: $H \leq G \;\wedge\; I \leq G \;\Rightarrow\; H \cap I \leq H \;\wedge\; H \cap I \leq I$

# Verknüpfungstafel Diedergruppe $D_4$




$$id = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = d_{M,0°}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{d_{M,90°}}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = d_{M,180°}$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = d_{M,270°}$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \boldsymbol{s_a}$$

$$ds = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = s_b$$

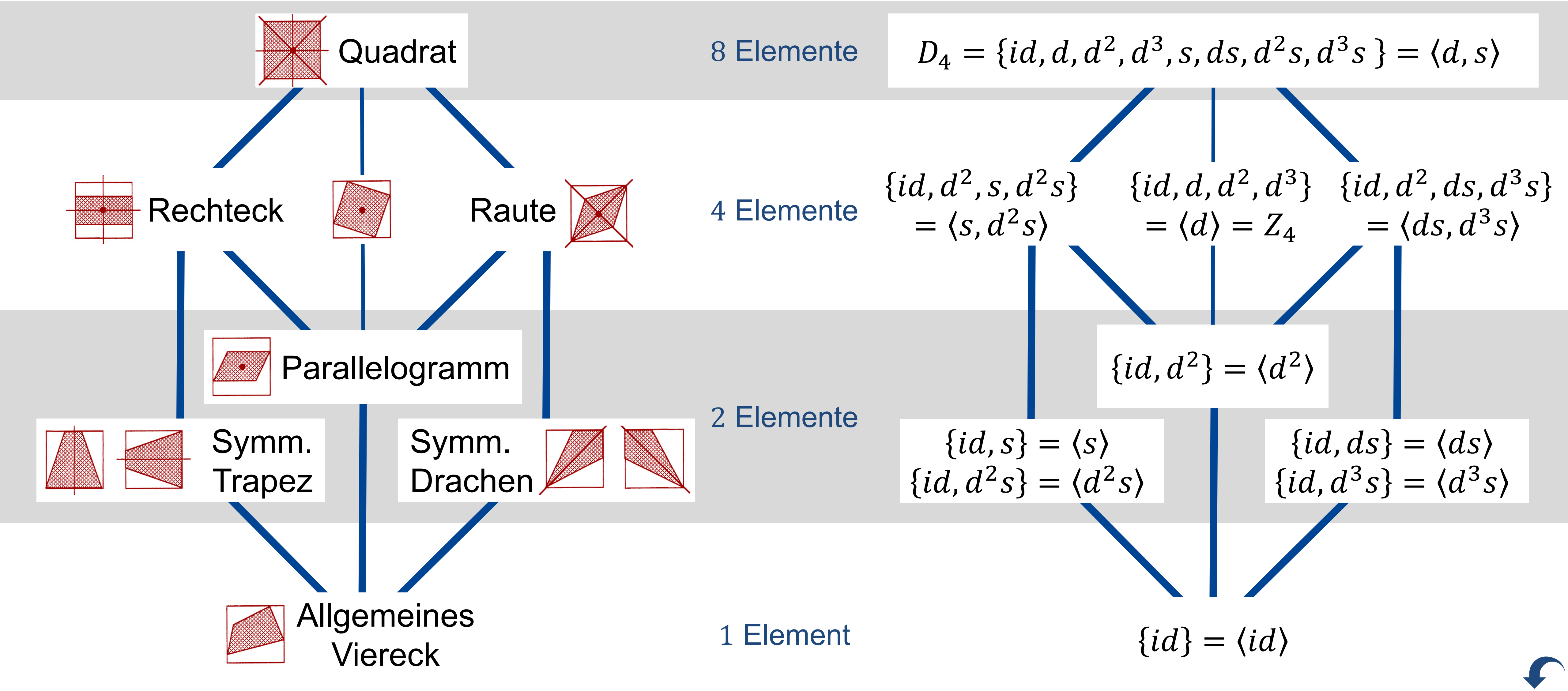
$$d^2s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = s_c$$

$$d^3s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} = s_d$$

$\boldsymbol{Z_4}$

| $\circ$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ |
| $d^3$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $id$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ |
| $ds$ | $ds$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $d^3$ | $id$ | $d$ | $d^2$ |
| $d^2s$ | $d^2s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ | $d$ |
| $d^3s$ | $d^3s$ | $s$ | $ds$ | $d^2s$ | $d$ | $d^2$ | $d^3$ | $id$ |

# Diedergruppe $D_4$ und ihre Untergruppen



# Untergruppekriterium und Erzeugendensystem

## Satz 2.2.1: Untergruppenkriterium

Ist $U$ eine nichtleere Teilmenge der Gruppe $(G,\circ)$, gilt also $U \subseteq G$ und $U \neq \{\}$, dann ist $U$ genau dann eine Untergruppe von $G$ $(U \leq G)$, wenn gilt:

(UG1) $\forall_{a,b \in U}\ a \circ b \in U$ (Abgeschlossenheit)

(UG2) $\forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in $U$ enthalten)

## Bemerkung

- Es gibt Erzeugendensysteme von Gruppen. Zum Beispiel erzeugen die beiden Achsenspiegelungen $s$ und $ds$ durch sukzessive Verknüpfung und Bildung von Inversen zusammen bereits die Diedergruppe $D_4 = \langle s, ds \rangle$.
- Im Allgemeinen entsteht so jeweils eine Untergruppe der Ausgangsgruppe.

## Definition 2.2.2: Erzeugendensystem und erzeugte Untergruppe

- Zu einer Teilmenge $A \subseteq G$ einer *endlichen* Gruppe $(G,\circ)$ entstehen durch Bildung von Inversen und Verknüpfung von Elementen neue Mengen.
- $A_0 = A$, man geht also von der ursprünglichen Teilmenge $A \subseteq G$ aus.
- Im $n$-ten Schritt bildet man alle Inversen und Verknüpfungen der Elemente aus $A_{n-1}$ und erhält

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} \cup (A_{n-1})^{-1} \cup A_{n-1} \circ A_{n-1} \\ &= A_{n-1} \cup \{a^{-1} | a \in A_{n-1}\} \cup \{a \circ b | a, b \in A_{n-1}\}. \end{aligned}$$

- Der Prozess endet, wenn in einem Schritt $m$ keine neuen Elemente hinzukommen, also gilt $A_m = A_{m-1}$.
- Die Menge $\langle A \rangle = A_m$ heißt die vom **Erzeugendensystem $A$ erzeugte Untergruppe** $(\langle A \rangle,\circ)$.

# Bildung einer Untergruppe von $D_4$ aus der Teilmenge $A = \{s, ds\}$

- **0. Schritt:** $A_0 = A = \{s, ds\}$
- **1. Schritt**
  - Alle Inverse zu den Elementen von $A_0$ bilden:
    - $s^{-1} = s$ und $(ds)^{-1} = ds$, weil Achsenspiegelungen invers zu sich selbst sind.
    - Die Menge aller Inverser zu Elementen aus $A_0$ ist: $(A_0)^{-1} \coloneqq \{s^{-1}, (ds)^{-1}\} = \{s, ds\}$
  - Verknüpfungen der Elemente von $A_0$ bilden:
    - $ds \circ s = d \circ s \circ s = d \circ (s \circ s) = d \circ id = d$
    - $s \circ ds \overset{d^k s = sd^{n-k}}{\triangleq} s \circ s \circ d^{4-1} = id \circ d^3 = d^3$
    - $s \circ s = id$
    - $ds \circ ds = d \circ s \circ s \circ d^3 = d \circ d^3 = d^4 = id$
    - $A_0 \circ A_0 = \{id, d, d^3\}$
  - $A_1 = A_0 \cup (A_0)^{-1} \cup A_0 \circ A_0$
    $= \{s, ds\} \cup \{s, ds\} \cup \{id, d, d^3\} = \{id, d, d^3, s, ds\}$
- **2. Schritt**
  - Alle Inverse zu den Elementen von $A_1$ bilden:
    - $id^{-1} = id$, weil $id \circ id = id$
    - $d^{-1} = d^3$, weil $d \circ d^3 = d^4 = id$
    - $(d^3)^{-1} = d$, weil $d^3 \circ d = d^4 = id$
    - $s^{-1} = s$, weil Achsenspiegelung
    - $(ds)^{-1} = ds$, weil Achsenspiegelung
    - Die Menge aller Inverser zu Elementen aus $A_1$ ist: $(A_1)^{-1} \coloneqq \{id, d, d^3, s, ds\}$
  - Alle Verknüpfungen der Elemente von $A_1$ bilden:
    - $id \circ A_1 = \{id, d, d^3, s, ds\}$
    - $d \circ A_1 = \{d, d^2, d^4, ds, d^2 s\} = \{d, d^2, id, ds, d^2 s\}$
    - …
  - $A_2 = A_1 \cup (A_1)^{-1} \cup A_1 \circ A_1$
- **…**
- $\langle A \rangle = \langle s, ds \rangle = A_m \leq D_4$

**Hinweis:** $(A_n)^{-1}$ ist der Bezeichner für die Menge, die die Inversen aller Elemente der Menge $A_n$ enthält.

# Diedergruppe $D_4$ und ihre Untergruppen