Zwei Kernthemen der Didaktik der analytischen Geometrie: Vektorbegriff und Parameterdarstellungen

Andreas Filler, Humboldt-Universität zu Berlin

Kolloquium Mathematik und ihre Didaktik

Universität Koblenz-Landau

08. Dezember 2014

Defizite des Unterrichts im Stoffgebiet Analytische Geometrie

„Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser. Der Höhepunkt ist etwa, zu beweisen, dass zwei verschiedene Geraden einen oder keinen Schnittpunkt haben, und dass diese Zahlen für Kreise 0, 1, 2 sind.“ (FREUDENTHAL, 1973)[1]

Vielfach anzutreffender „Ist-Stand“:

- Dominanz kalkülhaften Arbeitens:
  Reduktion des Unterrichts auf das Lösen von Standardaufgaben.
- Armut an geometrischen Formen
- Armut an einigermaßen überzeugenden Anwendungen
- Armut an Vernetzungen (Leitidee Funktionaler Zusammenhang?)
- Aber auch: Defizite bei der Verankerung weitreichender Begriffe.
  Konzeptuelles vs. prozedurales Verständnis von Mathematik

[1] Freudenthal: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart: Klett, 1973 (Bd. 2, S. 411)

Zugänge zum Vektorbegriff

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

– Ausgangspunkt: Geraden
– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Zugänge zum Vektorbegriff

Modi des Verständnisses und der Beschreibung von Konzepten der Linearen Algebra:[2]

- Synthetisch-geometrischer Modus (Sprache der Geometrie)
- Arithmetischer Modus (Sprache der Arithmetik)
- Algebraisch-struktureller Modus (Sprache der Algebra)

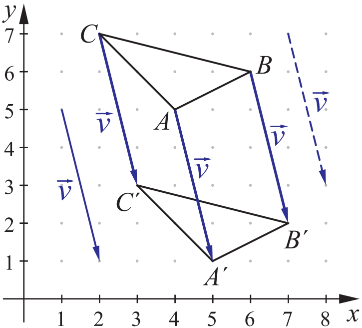
Konkretisiert für den Vektorbegriff:

- Geometrische Auffassung von Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile: Pfeilklassenauffassung
- Arithmetische Auffassung von Vektoren als n-Tupel (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen: n-Tupel-Auffassung
- Auffassung von Vektoren als Elemente eines (axiomatisch begründeten) Vektorraumes: Vektorraumauffassung

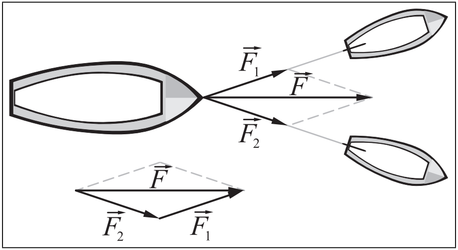
[2] Modes of description and language of linear algebra concepts, vgl. u. a. Hillel (2000), Sierpinska (1997, 1998, 2000)

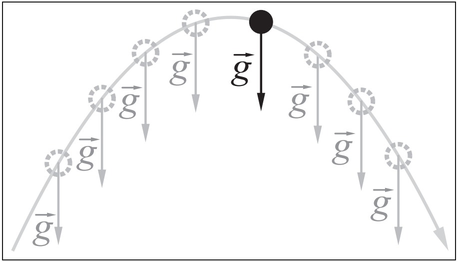
Verschiebungen

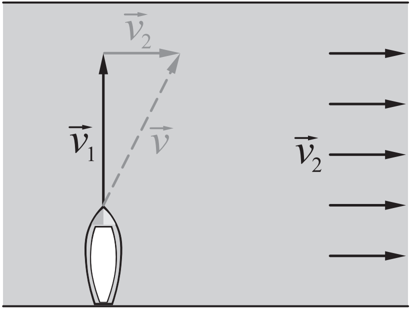
- Warum beschreiben die in der Abbildung dargestellten Pfeile dieselbe Verschiebung?
- Ermittle für jeden der Pfeile die Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes.
- Berechne für jeden Pfeil die Differenzen der x- und der y-Koordinaten. Was stellst du fest?



Kräfte und Geschwindigkeiten

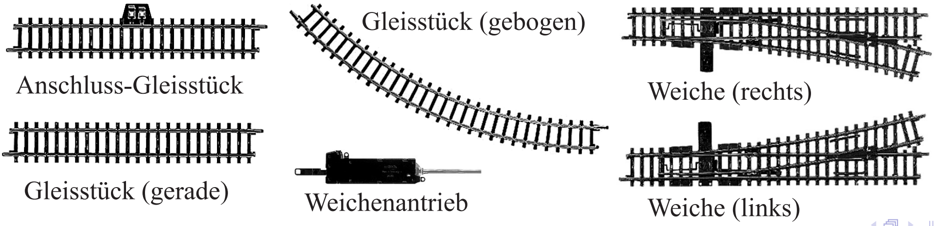






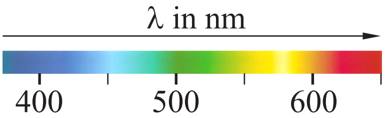
Stücklisten als n-Tupel

	Basis-sortiment	Ergänzungs-sortiment 1	Ergänzungs-sortiment 2
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8
Anschluss-Gleisstück	1	0	1
Weiche links	0	1	2
Weiche rechts	0	1	2
Weichenantrieb	0	2	4



Das RGB-Modell

- Sichtbarer Bereich des elektromagnetischen Spektrums: 380-780 nm.
- Tristimulustheorie: Auge besitzt drei Arten von Sensoren (Synapsen) mit unterschiedlicher wellenlängenabhängiger Empfindlichkeit.



- Dies wird beim RGB-Modell genutzt: Jede Farbe wir durch drei Grundfarben (Rot, Grün, Blau) gemischt (addiert).
- Farben werden durch Tripel $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ beschrieben.

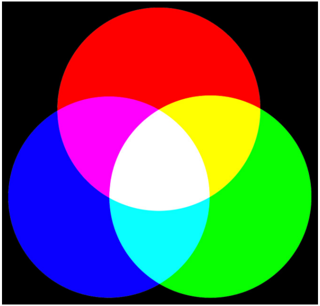
Vektoraddition u. Multiplikation mit Skalaren sind innerhalb des Definitionsbereichs $[0;1]$ der Komponenten sinnvolle Operationen für Farben:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \min\left(r_1 + r_2, 1\right) \\ \min\left(g_1 + g_2, 1\right) \\ \min\left(b_1 + b_2, 1\right) \end{pmatrix}$$

Beispiele:

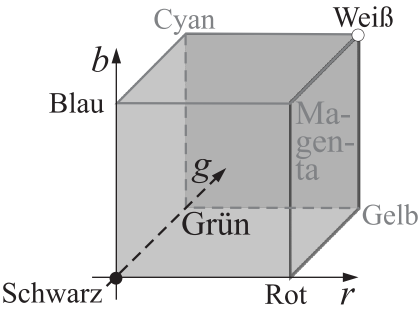
$$\mathrm{R} + \mathrm{G} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{W}$$

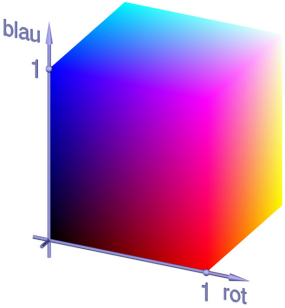
$$\mathrm{R} + \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Y}$$



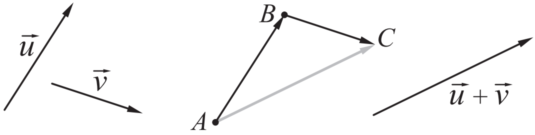
Der RGB-Würfel

- Menge aller Farb„vektoren“: Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die als Würfel im Anschauungsraum dargestellt werden kann (Farbwürfel).
- Komplementären Farben entsprechen gegenüberliegende Punkte des Würfels.





Es seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Pfeile, die diesen Klassen angehören. Als Summe der Pfeilklassen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird die Pfeilklasse bezeichnet, welche den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ als einen Repräsentanten besitzt:



Summe zweier *n*-Tupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

(analog für die skalare Multiplikation)

„Rechnen“ mit Pfeilklassen und n-Tupeln

→ Vorbereitung eines strukturellen Verständnis des Vektorbegriffs durch Erkennen der Gemeinsamkeiten von Pfeilklassen und n-Tupeln (sowie der Gemeinsamkeiten mit den reellen Zahlen).

- Koordinatenbeschreibung von Pfeilklassen
- Rechengesetze als Gemeinsamkeiten

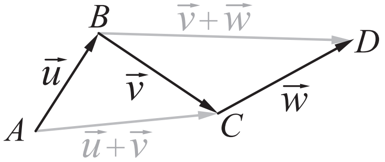
Stufen der Herausbildung eines Verständnisses grundlegender Begriffe (nach Vollrath)[3]

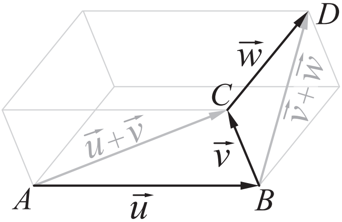
1. Stufe: Intuitives Begriffsverständnis
2. Stufe: Inhaltliches Begriffsverständnis
3. Stufe: Integriertes Begriffsverständnis
4. Stufe: Strukturelles Begriffsverständnis
5. Stufe: Formales Begriffsverständnis

[3] Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart, S. 219.

Beispiel: Assoziativität der Pfeilklassenaddition

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.





Beweis:

Es sei $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant der Pfeilklasse $\vec{u}$ ($\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$), $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{w}$.

Nach der „geometrischen Definition“ der Addition von Pfeilklassen ist dann $\overrightarrow{AC} \in \vec{u}+\vec{v}$ und $\overrightarrow{BD} \in \vec{v}+\vec{w}$.

Die Summe $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ wird durch $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ und $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ durch $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ repräsentiert, also gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Beispiel: Assoziativität der n-Tupel-Addition

Für beliebige n-Tupel $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Beweis mithilfe des Assoziativgesetzes in den reellen Zahlen:

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_2+y_2+z_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n+z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] \\
&= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})\,.
\end{aligned}
$$

Simultane Veranschaulichungen von Rechengesetzen

für Pfeilklassen und n-Tupel

- Assoziativität der Addition
- Kommutativität der Addition
- 1. Distributivgesetz

Die meisten der Vektorraumaxiome lassen sich derartig als gemeinsame Rechenregeln für Pfeilklassen und n-Tupel herausarbeiten bzw. zumindest veranschaulichen.

$\rightarrow$ *Ansätze* strukturellen Begriffsverständnisses

- Vertiefung durch einfache Beweise von Eigenschaften mithilfe der VR-Axiome ist möglich.
- I. Allg. ist nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler vollständig erfassen, dass aus den VR-Axiomen alle relevanten Eigenschaften von Vektoren folgen.

Zugänge zum Vektorbegriff

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

- Ausgangspunkt: Geraden
- Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Intentionen

- Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen
- Vernetzungen Analytische Geometrie – Analysis (zumindest ansatzweise)
- Anknüpfen an Sekundarstufe I: Elementargeometrie, Trigonometrie
- Formenvielfalt, ästhetischer Reiz

Parameterdarstellungen als Funktionen

Aspekte funktionalen Denkens[4]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet ...
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Notwendig für das Erfassen funktionaler Aspekte bei Par.darst.: Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen[5]
- Zuordnung $t \mapsto P(t)$; bei Ebenen: $(u;v) \mapsto P(u,v)$
- Aspekt Änderungsverhalten korrespondiert mit einer dynamischen Sicht: Geraden / Kurven als Bahnkurven, Parameter – Zeit

[4] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[5] Bereits hierbei bestehen erhebliche Defizite, vgl. WITTMANN, G.: *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie* (2003).

Parameterdarstellungen als Funktionen

Aspekte funktionalen Denkens[4]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet ...
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Notwendig für das Erfassen funktionaler Aspekte bei Par.darst.: Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen[5]
- Zuordnung $t \mapsto P(t)$; bei Ebenen: $(u; v) \mapsto P(u, v)$
- Aspekt Änderungsverhalten korrespondiert mit einer dynamischen Sicht: Geraden / Kurven als Bahnkurven, Parameter – Zeit

[4] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[5] Bereits hierbei bestehen erhebliche Defizite, vgl. WITTMANN, G.: *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie* (2003).

Aspekte funktionalen Denkens[6]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet …
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Manipulierender Umgang:[7] Objekt (z. B. Gerade) wird „eingekapselt" als Ganzes betrachtet und durch Aufpunkt und Richtungsvektor manipuliert.
- Reflektierender Umgang: Herstellung von Beziehungen zwischen dem Objekt als Ganzem und der zugrunde liegenden Zuordnung.

[6] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[7] VOM HOFE, R.: Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen. In: *MU* 50 (2004), 6, S. 47-56.

Aspekte funktionalen Denkens[6]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet …
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Manipulierender Umgang:[7] Objekt (z. B. Gerade) wird „eingekapselt" als Ganzes betrachtet und durch Aufpunkt und Richtungsvektor manipuliert.
- Reflektierender Umgang: Herstellung von Beziehungen zwischen dem Objekt als Ganzem und der zugrunde liegenden Zuordnung.

[6] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[7] VOM HOFE, R.: Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen. In: *MU* 50 (2004), 6, S. 47-56.

Parameterdarstellungen als Funktionen

Ansätze, um den Punktmengengedanken und den Aspekt funktionaler Zusammenhänge bei Parameterdarstellungen stärker einzubeziehen:

(1) Konstruktion von durch Parameterdarstellungen gegebenen Geraden als Punktmengen;

- Umkehrüberlegungen: welchen Parameterwerten sind bestimmte Punkte zugeordnet
- Vergleiche verschiedener Parametrisierungen derselben Objekte

(2) Betonung der dynamischen Sicht auf Geraden (und andere Kurven) als Bahnkurven;

- Interpretation des Parameters als Zeit:
  – Bezüge zur Beschreibung von Bewegungen in der Physik
  – Computeranimationen

Animationen – Interpretation des Parameters als Zeit

- Animationen erfordern zeitabhängige Beschreibungen von Positionen oder anderen Eigenschaften von Objekten.
- Interpretation des Parameters als Zeit in der Parameterdarstellung einer Geraden

$$P = P_0 + t \cdot \vec{a}$$

- Parameterdarstellungen erhalten einen Aspekt, der die geometrische Gestalt der durch sie beschriebenen Objekte nicht beeinflusst:

  Geschwindigkeit von Bewegungen.

Beispiel:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & P(t) = P_0 + t \cdot \vec{a} & (t \in \mathbb{R}_+) & \text{und} \\ \text{b)} & P(t) = P_0 + t^2 \cdot \vec{a} & (t \in \mathbb{R}_+) & \end{array}$$

Animationen – Interpretation des Parameters als Zeit

- Zusammensetzung (Addition) von geradlinigen Bewegungen kann zu nichtlinearen Bahnkurven führen.

Beispiel: Schräger Wurf

$$P(t) = P_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\,\vec{g} \cdot t^2$$

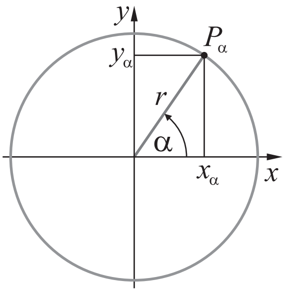
Zugänge zum Vektorbegriff

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

– Ausgangspunkt: Geraden

– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Kurven durch Variation des Einheitskreises



- Sinus und Kosinus am Einheitskreis (Sekundarstufe I):

$$\sin\alpha = y_\alpha \qquad \cos\alpha = x_\alpha$$

- Verallgemeinerungen:

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= r\cdot\cos\alpha \\ y(\alpha) &= r\cdot\sin\alpha \end{aligned} \qquad \alpha\in[0;2\pi)$$

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= x_M + r\cdot\cos\alpha \\ y(\alpha) &= y_M + r\cdot\sin\alpha \end{aligned} \qquad \alpha\in[0;2\pi)$$

- Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung nach Ersetzen des Parameters:

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cdot\cos(2\pi\cdot t) \\ y(t) &= r\cdot\sin(2\pi\cdot t) \end{aligned} \qquad t\in[0;1)$$

Die Substitution des Parameters mittels $\alpha = 2\pi\cdot t$ ist sinnvoll, wenn noch andere Größen durch den Parameter ausgedrückt werden sollen.

Kurven durch Variation des Einheitskreises

Fragen zur Modifikation des Einheitskreises

1. Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der sich um ein Zentrum bewegt und sich dabei gleichzeitig von dem Zentrum entfernt?
2. Welche Kurve beschreibt ein Punkt im Raum, der sich um ein Zentrum bewegt und simultan dazu seine Höhe (beschrieben z. B. durch die z-Koordinate) verändert?

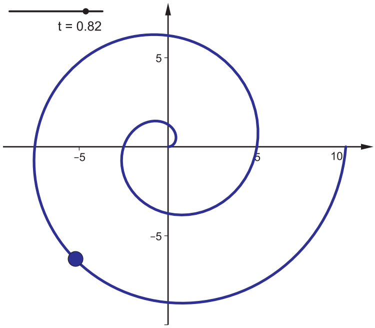
Variationen an Parameterdarstellungen von Kreisen

- Radius als Funktion des Parameters
- Kreis

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi \cdot t) \end{aligned} \qquad t \in [0; 1)\,;\; r = \text{const}$$

- Radius als Funktion des Parameters
- Archimedische Spirale

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(4\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(4\pi \cdot t) \end{aligned} \qquad t \in [0; 1]\,;\ r = \text{const}$$



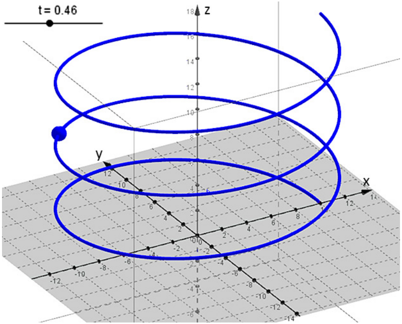
Variationen an Parameterdarstellungen von Kreisen

- „Höhe“ (bisher konstante Koordinate) als Funktion des Parameters
- Kreis

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi \cdot t) \qquad\qquad t \in [0;1)\,;\ r = \text{const} \\ z(t) &= 0 \end{aligned}$$

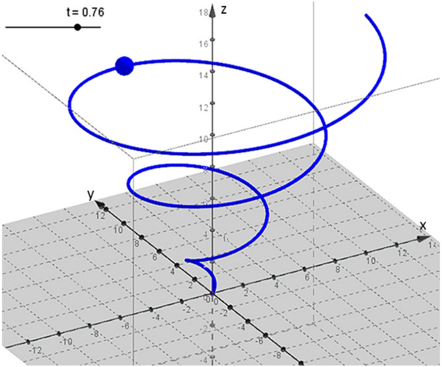
- „Höhe“ (bisher konstante Koordinate) als Funktion des Parameters
- Schraubenlinie (Helix, zylindrische Spirale)

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cdot\cos(6\pi\cdot t) \\ y(t) &= r\cdot\sin(6\pi\cdot t) \qquad t\in[0;1]\,;\ r,h=\text{const} \\ z(t) &= h\cdot t \end{aligned}$$



- Kombination beider Variationen
- Konische Spirale

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(6\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(6\pi \cdot t) \qquad t \in [0;1]\,;\ r, h = \text{const} \\ z(t) &= h \cdot t \end{aligned}$$

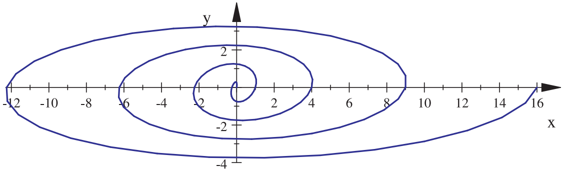


„Halbquadratische Schnecke“*

Die „halbquadratische Schnecke“ ist eine Variation der Archimedischen Schnecke.

Eine der Koordinaten (hier x) hängt vom Quadrat des Parameters t ab.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= t \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

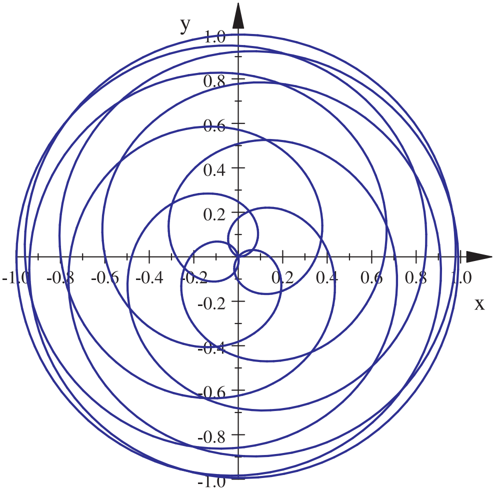


* Die Bezeichnungen in Anführungsstrichen wurden den Kurven von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses gegeben.

„Sinuskreis“

Diese Kurve entsteht durch Abhängigkeit des Radius von $\sin(t)$.

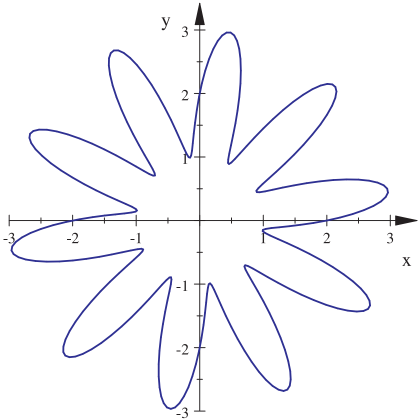
$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$



„Blumenkurve“

Ähnlich wie beim Sinuskreis ergibt sich hier für $r(t)$ die Wertemenge {1;3}. Dadurch entsteht die Blütenform der Kurve.

$$\begin{aligned} r(t) &= 2+\sin(20\pi t) \\ x(t) &= r(t)\cdot\cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t)\cdot\sin(2\pi t) \end{aligned}$$

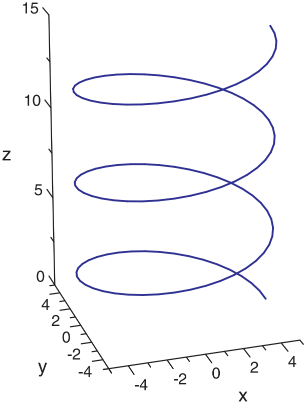


Ausgewählte 3D-Kurven

Raumhelix

Eine der einfachsten dreidimensionalen Kurven ist die Raumhelix (Schraubenlinie). Betrachtet man nur $x(t)$, $y(t)$ ergibt sich ein Kreis. Dieser wird von $z(t) = t$ schraubenförmig auseinandergezogen.

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$



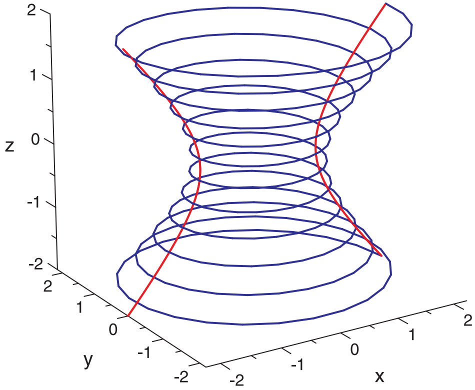
„Hyperbelschnecke“

Die „Hyperbelschnecke“ basiert auf einer Raumhelix, die sich aufgrund einer Hyperbel als Hüllkurve um ein Hyperboloid windet.

$$\begin{aligned} r &= h(t) \\ h(t) &= \sqrt{t^2+1} \\ x(t) &= r \cdot \cos(6\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(6\pi t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

Hüllkurve:

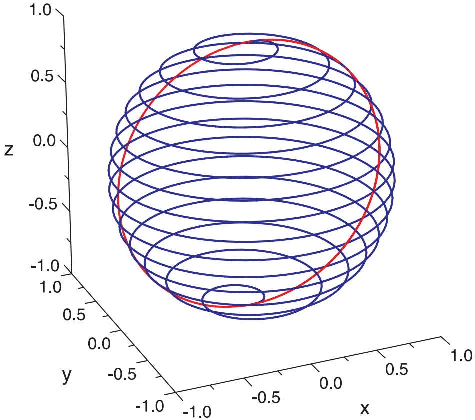
$$\begin{aligned} x(t) &= \pm h(t) \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= t \end{aligned}$$



„Kugelschnecke“

Anders als bei der „Hyperbelschnecke“ wurde hier ein Kreis als Hüllkurve verwendet.

$$
\begin{aligned}
r &= h(t) \\
h(t) &= \sqrt{1-t^2} \\
x(t) &= r \cdot \cos(14\pi t) \\
y(t) &= r \cdot \sin(14\pi t) \\
z(t) &= t
\end{aligned}
$$



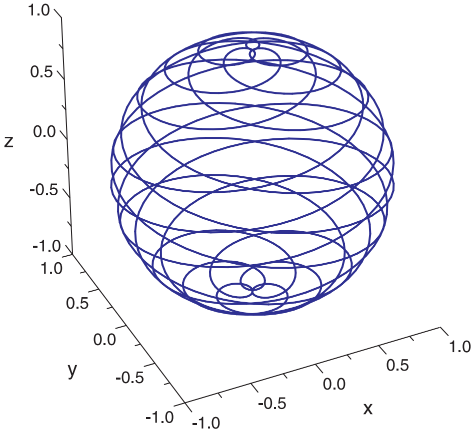
Hüllkurve:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \pm h(t) \\
y(t) &= 0 \\
z(t) &= t
\end{aligned}
$$

„Ballkurve“

Eine weitere Kugel ergibt sich, wenn man den „Sinuskreis“ in der dritten Dimension von $\cos(t)$ abhängen lässt.

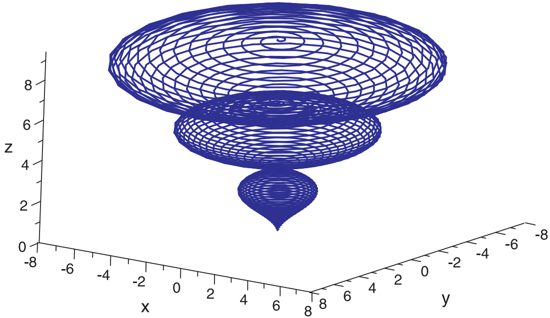
$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t)\cdot\cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t)\cdot\sin(2\pi t) \\ z(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$



„Kronleuchter“

Der „Kronleuchter“ ergibt sich aus einer Raumhelix mit Radiusfunktion $r(t) = t \cdot \sin(t)$.

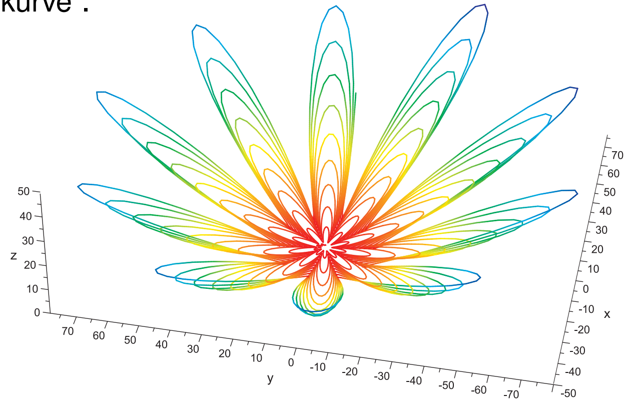
$$
\begin{aligned}
r(t) &= t \cdot \sin(t) \\
x(t) &= r(t) \cdot \cos(20\pi t) \\
y(t) &= r(t) \cdot \sin(20\pi t) \\
z(t) &= t
\end{aligned}
$$



„Blumenkurve“

Durch gezieltes Ausprobieren entstand eine Kurve, die Ähnlichkeiten zu einer Blüte aufweist. Zu Grunde lag die zweidimensionale „Blumenkurve“.

$$\begin{aligned} r &= 5 \\ s(t) &= 1 + r \cdot t + 0.7 \cdot \sin(t \cdot 20 \cdot \pi) \\ x(t) &= s(t) \cdot \cos(2 \cdot t \cdot \pi) \\ y(t) &= s(t) \cdot \sin(2 \cdot t \cdot \pi) \\ z(t) &= 0.01 \cdot r^2 \cdot (1 + \sin(20 \cdot t \cdot \pi)) \cdot t^2 \end{aligned}$$



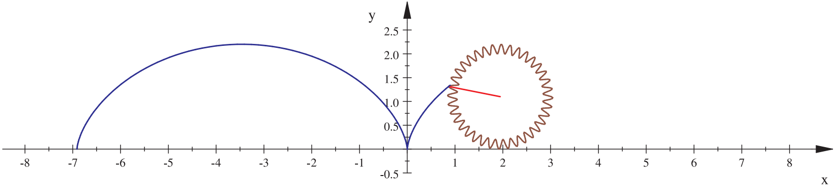
ENDE

Zykloiden

Welche Kurve beschreibt ein Fahrradventil,
wenn das zugehörige Fahrrad fährt?

Der betrachtete Punkt muss nicht genau den Radius als Abstand zum Mittelpunkt haben, sondern kann auch außer- oder innerhalb des „Rades“ liegen.

Zykloiden



Schülertext: „Um auf die Parameterdarstellung der Zykloide zu kommen, muss man wissen, um welchen Winkel α sich das Rad dreht, wenn der Mittelpunkt des Rades sich um t nach rechts verschiebt. Bewegt sich der Mittelpunkt um t, so muss sich auch der Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ um t abwickeln.

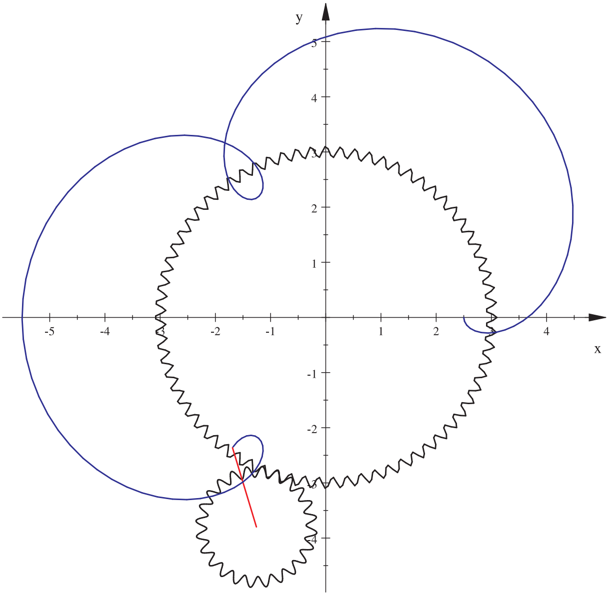
$$t = \frac{\alpha(t)}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \;\Leftrightarrow\; \alpha(t) = \frac{t}{r}$$

Die Parameterdarstellung der Zykloide setzt sich aus einer Kreisbewegung und einer linearen Bewegung zusammen. …“

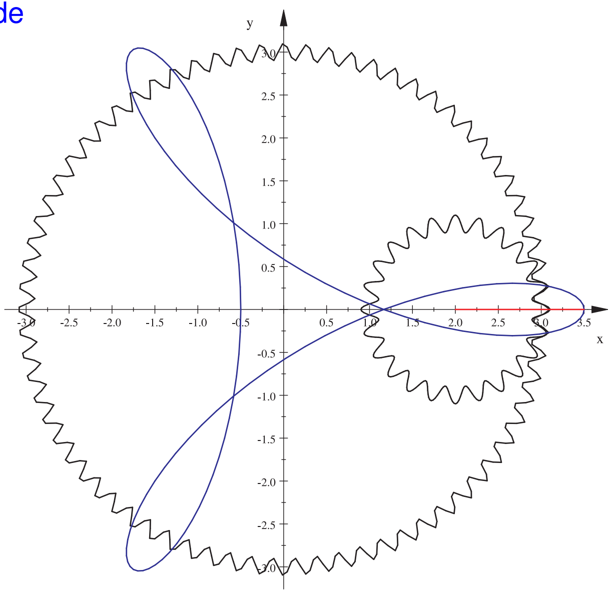
… einige Fallstricke gibt es aber noch:

- Drehrichtung
- Startpunkt

Epizykloide



Hypozykloide



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.